

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

TC 17

Colloquium Mathematische Problemen uit de praktijk, 1.

1950-1951

Timman R., Veen S.C. van.



1952

TW

BIBLIOTHEEK    MATHEMATISCH    CENTRUM  
AMSTERDAM

## Colloquium Mathematische Problemen uit de praktijk, 1.

1950/51

Timman R	De luchtkrachten op een trillend draagvlak, berekend met de methoden der potentiaaltheorie.	p 1 - 19
Timman R	Het trillend draagvlak bij supersonische snelheden.	p 20 - 27
Lauwerier H A	De toepassing van Laplace-transformatie in mathematisch-fysische problemen.	p 28 - 32
Lauwerier H A	Toepassingen van de Laplace-transformatie II.	p 33 - 38
Lauwerier H A	Toepassing van de tweezijdige Laplace transformatie.	p 39 - 43
Timman R	Mathematische behandeling van stroming door poreuze media.	p 44 - 51
Timman R	Mathematische theorie van de stroming door poreuze media.	p 52 - 88
Esmeijer W L	Twee vraagstukken uit de theorie der temperatuurspanningen.	p 89 - 97
Wijngaarden A van	Foutschattingen in de numerieke wiskunde.	p 98 - 104
Verschaffelt J E	De thermomechanica der transportverschijnselen.	p 105 - 108
Vooren A J van de	Trillingen van vliegtuigvleugels.	p 109 - 119
Veen S C van	Grafische behandeling van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. (Methode der isoklinen).	p 120 - 134

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 19 Oct. 1950 /51

De luchtkrachten op een trillend draag-  
vlak, berekend met de methoden der poten-  
tiaaltheorie.

door

R. Timman.

1. Inleiding.

Onder ongunstige omstandigheden kunnen aan vliegtuigonderdelen (vleugels, roeren) tijdens de vlucht heftige trillingsverschijnselen optreden, die veroorzaakt worden door de werking van de lucht. Het spreekt vanzelf, dat het van het grootste belang is om tijdens het ontwerp van het vliegtuig over de mogelijkheid te beschikken om deze trillingen te berekenen. Het probleem valt uiteen in twee delen, een probleem van elastische trillingen van een mechanisme met een groot aantal graden van vrijheid en een probleem van de berekening van de krachten, die de lucht op een trillende vleugel uitoefent.

Met dit tweede probleem zullen wij ons hier bezighouden. Het algemene ~~probleem~~ van een draagvlak van willekeurige vorm is zeer gecompliceerd en nog lang niet opgelost.

Voor de praktijk is het voldoende om de volgende vereenvoudigingen aan te brengen.

I. De vleugel, die in het algemeen een grote spanwijdte heeft, wordt vervangen door een oneindig lange cylinder, zodat het stromingsbeeld tweedimensionaal wordt.

II. Daar in het algemeen de dikte van de vleugel klein is t.o.v. de koorde, wordt zij verwaarloosd.

III. De uitslagen van de trillende beweging worden klein verondersteld. Dit is zeker geoorloofd, daar het doel van de berekening is de stabiliteitsgrens van de trillingen te bepalen.

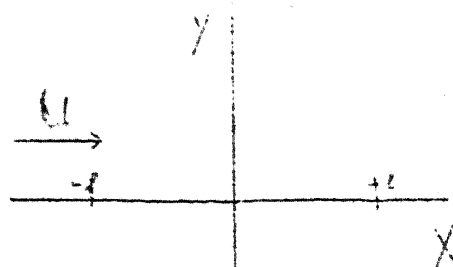
Het blijkt n.l., dat de damping, die de luchtkrachten uitoefenen, afhangt van de vliegsnelheid. In het eenvoudigste geval is beneden een bepaalde vliegsnelheid de damping positief, daarboven is zij negatief, d.w.z., dat de lucht een eenmaal aanwezige kleine trilling versterkt.

De berekening zal nu worden gebaseerd op de onderstelling, dat de voorwaartse snelheid van het vliegtuig groot is t.o.v. de snelheden, die door de trillende vleugel worden opgewekt, zodat het veld van deze snelheden als een storingsveld kan worden opgevat en tweede en hogere machten van deze snelheden verwaarloosd kunnen worden.

IV. Als laatste vereenvoudigende veronderstelling wordt ingevoerd, dat de vliegsnelheid zo klein is, dat de invloed van de samendrukbaarheid van de lucht verwaarloosd kan worden.

## 2. De bewegingsvergelijking van de stromende lucht.

Neem in het platte vlak aan een rechthoekig assenkruis, vast verbonden aan de vleugel, welks doorsnijding met het vlak gegeven is door het segment  $-l < x < +l$  van de X-as. Een wervelvrije stroming van de onsamendrukbare lucht wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen



$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

en de conditie van wervelvrijheid

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4)$$

als U en V de componenten van de snelheid zijn, p de druk en  $\rho$  de dichtheid. Maken wij gebruik van (4), dan kunnen (1) en (2) geschreven worden als:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (U^2 + V^2) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (U^2 + V^2) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (6)$$

Op grond van verg. (4) bestaat een snelheidspotentiaal  $\Phi(x,y)$  zodanig, dat

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (7)$$



Nu kunnen (5) en (6) geïntegreerd worden tot de vergelijking van Bernoulli voor de instationnaire stroming:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (U^2 + V^2) = - \frac{1}{\rho} (p - p_0) \quad (8)$$

waarbij  $p_0(t)$  een onbepaalde functie van  $t$  is.

Substitutie van (7) in de continuïteitsvergelijking levert de vergelijking van Laplace

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (9)$$

voor de instationnaire snelheidspotentiaal  $\Phi$ .

### 3. Het randwaardeprobleem.

Voeren wij nu in een splitsing van het snelheidsveld in het veld van de ongestoorde stroming van de lucht, die een homogene parallelstroming met snelheid  $V$  in de positieve  $x$  richting voorstelt, dan is

$$\Phi = Ux + \varphi^* \quad (1)$$

waarbij  $\varphi^*$  het storingsveld van het draagvlak is, dat eveneens aan de vergelijking van Laplace voldoet

$$\Delta \varphi^* = \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

De vergelijking van Bernoulli wordt nu:

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ (V + u)^2 + v^2 \} = - \frac{1}{\rho} (p - p_0), \quad (3)$$

of, na verwaarlozen van de kwadratische termen

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} (p - p_0), \quad (4)$$

zodat hieruit de druk gevonden kan worden ( $p_0 = p_\infty - \frac{1}{2} \rho U^2$ ).

De krachtwerking, die de lucht op de trillende vleugel uitoefent, kan berekend worden, als de druk op het vleugeloppervlak bekend is en deze kan uit (4) berekend worden, indien de snelheidspotentiaal  $\varphi^*$  bekend is.

Wij berekenen deze snelheidspotentiaal vooreen vervormbare vleugel, die een harmonische trilling uitvoert, waarbij om ieder van hare punten de uitwijking bekend is \*)

---

\*) Wij gebruiken hier en in het vervolg de complexe schrijfwijze en bedoelen dus met (5)  $y = \text{Re } f(x) \cdot e^{i\nu t}$ .

$$y = f(x) \cdot e^{i\nu t} \quad (5)$$

waarbij  $f(x) \ll l$  is verondersteld.

Dit betekent, dat voor een punt in de lucht op het oppervlak de normaalsnelheid gegeven is.

$$v_n = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + U \frac{\partial y}{\partial x} = (i\nu f(x) + U \frac{df}{dx}) e^{i\nu t} \quad (6)$$

De bovengenoemde verwaarlozing van de dikte van het profiel en de onderstelling van kleine afwijkingen uit de evenwichtsstand brengt nu mede, dat (6) niet beschouwd worde als te geven de normaalsnelheid van de lucht langs de profielcontour, maar langs boven- en onderzijde van het segment  $-l < x < +l$  van de X-as.

Dit levert dus voor de snelheidspotentiaal  $\varphi^*$  de randvoorwaarde

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = w(x) \cdot e^{i\nu t}, \quad (7)$$

langs boven- en onderzijde van het segment  $-l < x < +l$  van de X-as.

(7) suggereert om te stellen

$$\varphi^*(x, y, t) = \varphi^*(x, y) \cdot e^{i\nu t}$$

zodat het probleem teruggebracht is tot het probleem van Neumann (2e randvoorwaardeprobleem uit de potentiaaltheorie) van de functie  $\varphi^*$ .

Gevraagd wordt een functie  $\varphi(x, y)$  te bepalen, die een oplossing is van de vergelijking

$$\Delta \varphi = 0$$

en op het dubbel tellende segment van de X-as:  $-l < x < +l$  voldoet aan de randvoorwaarde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = w(x).$$

De voorwaarden, waaraan  $\varphi^*$  in het oneindige moet voldoen, zijn hier nog niet gepreciseerd, zodat de oplossing nog niet ondubbelzinnig bepaald is (zie verder).

#### 4. Het stationnaire probleem.

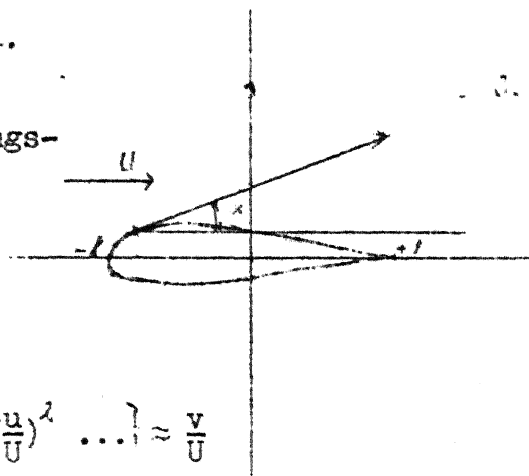
Ter verduidelijking van de methode behandelen wij eerst het stationnaire probleem.

Deze behandelingswijze levert de theorie der dunne draagvlakken (Glauert).

Neem hier even aan, dat de dikte niet verwaarloosd mag worden, maar wel klein is. De normaalsnelheid op het oppervlak van het profiel wordt

weer geïdentificeerd met de verticale snelheid. In een punt van het profiel moet de snelheid raken aan het profiel. Noem de totale snelheid  $q$  en de helingshoek  $\alpha$ , dan geldt voor de storingscomponenten  $u$  en  $v$

$$\begin{aligned} U + u &= q \cos \alpha \\ v &= q \sin \alpha \end{aligned}$$



en dus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{U+u} = \frac{v}{U} \cdot \left\{ 1 - \frac{u}{U} + \left(\frac{u}{U}\right)^2 \dots \right\} \approx \frac{v}{U}$$

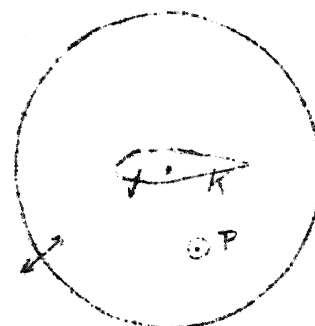
in de aangenomen benadering, d.w.z. met de gegeven gedaante van de profielcontour is

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial n} = U \operatorname{tg} \alpha$$

langs de omtrek van het profielgegeven. Het probleem van de stroming om dunne profielen is dus eveneens een probleem van Neumann voor het lijnsegment  $-l < x < +l$ .

De oplossing wordt geleverd met behulp van een functie van Green van deze gesloten kromme.

Beschouw een gebied, enerzijds begrensd door de kromme  $K$ , waarlangs  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  gegeven is (hier dus het dubbele lijnsegment) anderzijds door een grote cirkel met straal  $R$ , dan geldt voor twee functies  $\varphi$  en  $\psi$  de formule van Green:



$$\iint (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\sigma = \int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds.$$

Indien een van de functies, bijv.  $\psi$  in een punt  $P(x_p, y_p)$  logarithmisch oneindig wordt, moeten wij dit punt uitsluiten door een klein cirkeltje met straal  $r$ . Dan is langs dit cirkeltje

$$\begin{aligned} \psi &= \ln r \\ ds &= r \cdot d\theta \\ \text{en } \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \frac{1}{r}, \text{ zodat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds &= - \int_0^{2\pi} r \left\{ \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{r} \varphi \right\} d\theta = \\ &= - 2\pi \varphi(x_p, y_p) \end{aligned}$$

In totaal wordt dan, als bovendien  $\varphi$  en  $\psi$  beide voldoen aan de vergelijking van Laplace:

$$\int_K \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds = 2\pi \varphi(x_p, y_p)$$

De voorwaarden, waaraan  $\psi$  moet voldoen, zijn dus de volgende:

- 1) voldoet aan de vergelijking van Laplace

$$\Delta \psi = 0$$

- 2) In het punt P heeft  $\psi$  de gedaante

$$\psi = \ln r + \dots$$

Verder wensen we, daar alleen op K de waarde van  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  gegeven is, dat voor  $R \rightarrow \infty$  de bijdrage van deze cirkel tot een constante nadert.

Wij zullen hier niet nader op ingaan en verwijzen daarom naar de leerboeken (Sternberg en Kellogg \*).

In dit geval is dus het resultaat

$$2\pi \varphi(x_p, y_p) = \int_K \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds + C$$

Indien nu, zoals hier  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  gegeven is, zoeken wij de functie  $\psi$  zo te bepalen, dat langs K  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  is. In dit geval is

$$2\pi \varphi(x_p, y_p) = - \int_K \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + C$$

Een functie  $\psi$ , die aan al deze voorwaarden voldoet en dus de oplossing van ons probleem levert, noemen we een functie van Green van de 2<sup>e</sup> soort van de kromme K en de vergelijking van Laplace.

##### 5. Bepaling van de functie van Green voor het dubbel tellende lijnsegment.

De functie van Green voor het lijnsegment is het eenvoudigste te bepalen door conforme transformatie.

Beschouw daartoe de afbeelding

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} l \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \vartheta \\ y &= \frac{1}{2} l \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \vartheta \end{aligned} \quad (1)$$

dan wordt het lijnsegment  $-l < x < +l$  afgebeeld op de cirkel  $\rho = 1$ .

Een eenvoudige berekening leert dan, dat op het lijnsegment

$$\left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} = l \sin \vartheta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (2)$$

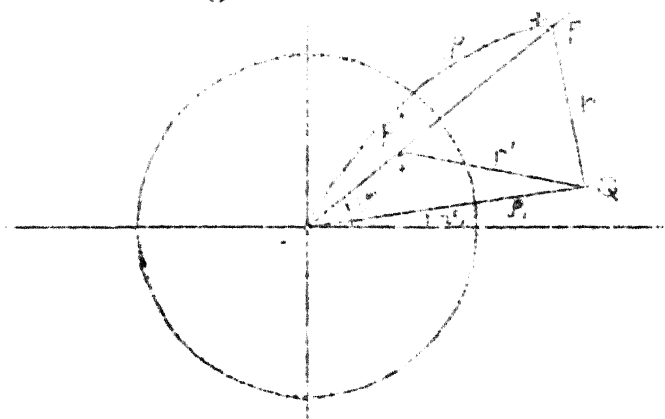
zodat ook op de cirkel de normale afgeleide gegeven is. Verder kan worden aangetoond, dat in het  $(\rho, \vartheta)$  vlak de functie  $\psi$  voldoet aan

---

\*) Een nodige en voldoende voorwaarde is, dat voor  $R \rightarrow \infty$   $\psi$  en  $\varphi$  zich beide gedragen als  $\ln R$  of kleiner zijn, d.w.z. als de potentiaal een eindige bronbelegging.

de vergelijking van Laplace (nu in poolcoordinaten).

Het probleem is nu teruggebracht tot het probleem van Neumann voor de cirkel en de functie van Green is de functie van Green voor het buitengebied van de cirkel. Deze moet



1<sup>o</sup>. een oplossing zijn  $\Delta \varphi = 0$ .

2<sup>o</sup>. een logarithmische singulariteit hebben in het punt  $P(\rho, \psi)$

3<sup>e</sup>. normale afgeleide = 0 op de rand van de eenheidscirkel.

Hydrodynamisch beeld: veld van een eenheidsbron in  $P(\rho, \psi)$  een

bron in het spiegelpunt van P  $P^*(\frac{1}{\rho}, \psi)$  en een even grote put in de oorsprong (opdat de cirkel stroomlijn zij).

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \{ \ln r + \ln r' - \ln \rho \} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi - \psi') \\ r'^2 &= \frac{1}{\rho^2} + \rho'^2 - \frac{2\rho'}{\rho} \cos(\psi - \psi') \end{aligned} \quad (4)$$

dus

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\{ \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi - \psi') \}}{\rho'^2} \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \rho'^2 - \frac{2\rho'}{\rho} \cos(\psi - \psi') \right\} \quad (5)$$

Het is gemakkelijk te verifiëren, dat  $G(P, Q)$  inderdaad (als functie in  $\rho$  en  $\psi$ ) aan alle eisen voldoet. Merk verder op, dat  $G$  symmetrisch is in P en Q.

## 6. De reguliere oplossing van het probleem.

Met de gevonden functie van Green kan nu het gestelde probleem van het stationnaire draagvlak opgelost worden.

Van de snelheidspotentiaal  $\varphi$  in het  $\rho, \psi$  vlak is gegeven

$$\left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} = l \sin \psi \cdot v^*(x) \quad (1)$$

en de oplossing is voor  $\varphi_p(\rho, \psi)$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \psi) &= \int_0^{2\pi} G(P, Q) \cdot l \sin \psi' \cdot v^*(l \cos \psi') \cdot d\psi' = \\ &= \frac{l}{4\pi} \int_0^{2\pi} v(\psi') \cdot \ln \{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \psi') \} \left\{ \frac{1}{\rho^2} + 1 - \frac{2}{\rho} \cos(\psi - \psi') \right\} \\ &\quad \sin \psi' \cdot d\psi' = \\ &[v^*(l \cos \psi') = v(\psi')] \end{aligned}$$

$$\varphi(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\vartheta_1) \cdot \ln \left\{ \frac{1}{\rho} + \rho - 2 \cos(\vartheta - \vartheta_1) \right\} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \quad (2)$$

Hiermee is de snelheidspotentiaal in het gehele veld gevonden.

Voor de drukverdeling is in de eerste plaats interessant de tangentiële snelheid op het draagvlak

$$K = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{y=0} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \left[ \frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \int_0^{2\pi} V(\vartheta_1) \frac{2 \sin(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{\rho + \frac{1}{\rho} - 2 \cos(\vartheta - \vartheta_1)} \right]_{\rho=1}$$

$$u(\vartheta) = \frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \int_0^{2\pi} V(\vartheta_1) \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1}{1 - \cos(\vartheta - \vartheta_1)} d\vartheta_1 =$$

$$\frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \int_0^{2\pi} V(\vartheta_1) \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \quad (3)$$

waarbij de integraal als een hoofdwaaarde integraal in de zin van Cauchy is te beschouwen.

Wij kunnen deze integraal nog een iets andere vorm geven door ( ) te splitsen in een symmetrisch en een antimetrisch stuk

$$V_s(\vartheta_1) = \frac{1}{2} \{ V(\vartheta_1) + V(2\pi - \vartheta_1) \}$$

$$V_a(\vartheta_1) = \frac{1}{2} \{ V(\vartheta_1) - V(2\pi - \vartheta_1) \} \quad (4)$$

Dan wordt

$$u(\vartheta) = \frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \left[ \int_0^\pi V(\vartheta_1) \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 + \int_0^{2\pi} V(\vartheta_1) \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \left[ \int_0^\pi V(\vartheta_1) \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 - \int_0^\pi V(2\pi - \vartheta_2) \cot \frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta_2) \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \left[ \int_0^\pi V_s(\vartheta_1) \left\{ \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) - \cot \frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta_1) \right\} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 - \right.$$

$$\left. \int_0^\pi V_a(\vartheta_1) \left\{ \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) + \cot \frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta_1) \right\} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^\pi V_s(\vartheta_1) \frac{\sin^2 \vartheta_1 d\vartheta_1}{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta} + \int_0^\pi V_a(\vartheta_1) \frac{\sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta} \right]$$

In het instationnaire geval is  $V$  een even functie van  $\psi$ , zodat daar  $V_a(\psi) \equiv 0$  en de oplossing wordt

$$u = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sin \psi} \int_0^\pi V_s(\psi_1) \frac{\sin^2 \psi_1 d\psi_1}{\cos \psi_1 - \cos \psi} \right] \quad (6)$$

De snelheidspotential  $\varphi$  op het draagvlak is dan

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_s(\psi_1) \ln \frac{1 - \cos(\psi - \psi_1)}{1 - \cos(\psi + \psi_1)} \sin \psi_1 d\psi_1 \quad (7)$$

In het stationnaire geval is de druksprong op het draagvlak gegeven door (4) met  $\nu = 0$

$$\frac{p_+ - p_-}{\rho} = 2 u u = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\sin \psi} \int_0^\pi V_s(\psi_1) \frac{\sin^2 \psi_1 d\psi_1}{\cos \psi_1 - \cos \psi} + \int_0^\pi V_a(\psi_1) \frac{\sin \psi_1 d\psi_1}{\cos \psi_1 - \cos \psi} \right] \quad (8)$$

en in het instationnaire geval

$$\begin{aligned} \frac{p_+ - p_-}{\rho} &= 2 \left[ i\nu \varphi + u u \right] e^{i\nu t} = 2 u \left[ \frac{i\nu}{u} \int_0^\pi V_s(\psi_1) \ln \frac{1 - \cos(\psi - \psi_1)}{1 - \cos(\psi + \psi_1)} \sin \psi_1 d\psi_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \psi} \int_0^\pi V_a(\psi_1) \frac{\sin^2 \psi_1 d\psi_1}{\cos \psi_1 - \cos \psi} \right] e^{i\nu t} \quad (9) \end{aligned}$$

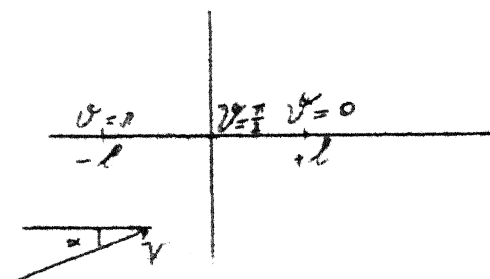
## 7. De oplossing met circulatie in het stationnaire geval.

De in de voorgaande paragraaf gegeven oplossing is echter niet de oplossing van het probleem van een draagvlak, zoals dat in werkelijkheid is geconstrueerd. Om dit in te zien, beschouwen wij de gedaante van de stroming om het draagvlak nader.



Beschouw nu, om de gedachten te bepalen, het stationnaire stromings-  
 beeld om een vlakke plaat, die zich uitstrekt langs het segment  
 $-l < x < +l$  van de x-as, terwijl de hoofdstroming een hoek  $\alpha$  met de  
 x-as maakt en een snelheid  $V$  heeft.

Omdat op de plaat een totale normaal-  
 snelheid 0 moet heersen, moet de stoor-  
 snelheid een normale component hebben  
 die de verticale component  $V \sin \alpha$   
 compenseert



$$v = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0, -l < x < +l} = -V \sin \alpha \quad (1)$$

d.w.z.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -V \sin \alpha \quad \text{voor } y = +0 \quad -l < x < +l \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= +V \sin \alpha \quad y = -0 \quad -l < x < +l \end{aligned} \quad (2)$$

Transformeer weer naar het  $\rho, \vartheta$  vlak, dan is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} l \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \cos \vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} l \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \sin \vartheta \quad (3)$$

en op de cirkel  $\rho=1$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} = l \cdot \sin \vartheta \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0, -l < x < +l} = -V l \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \alpha \quad (4)$$

Denk nu het buitengebied van het draagvlak afgebeeld op het binnengebied  
 van de cirkel, dan is  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=1}$  een differentiatie naar de naar buiten  
 gerichte normaal.

Toepassing van de formule van Green

levert dan

$$\varphi(\rho, \vartheta) = \frac{V l \sin \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \rho + \frac{1}{\rho} - 2 \cos(\vartheta - \vartheta') \right\} \sin \vartheta' d\vartheta' \quad (5)$$

Om nu de tangentielle snelheid langs de  
 plaat te vinden, berekenen wij  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  op  
 de plaat.

Nu is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{2} l \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \cdot \frac{1}{2} l \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \vartheta$$

hetgeen voor  $\rho=1$  overgaat in

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\rho=1} = -l \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} \sin \vartheta$$



dus

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{-1}{l \sin \vartheta} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=1} \quad (6)$$

Uit (5) volgt, dat voor  $\rho \neq 1$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{V l \sin \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \sin(\vartheta - \vartheta_1)}{\rho + \frac{1}{\rho} - \cos(\vartheta - \vartheta_1)} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \quad (7)$$

Voor  $\rho = 1$  wordt de integraal divergent en men kan aantonen dat dan de snelheid weergegeven wordt door

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{-V \sin \alpha}{2\pi \sin \vartheta} \cdot \int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1, \quad (8)$$

$-l < x < +l$

indien voor de integraal de hoofdwaaarde van Cauchy wordt genomen.

Door in te voeren

$$\vartheta_1 - \vartheta = \psi$$

vindt men dan

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0} = -V \sin \alpha \cot \vartheta. \quad (9)$$

$-l < x < +l$

Om het stromingsbeeld langs de plaat te verkrijgen beschouwen wij de totale snelheid in tangentiële en normale richting

$$u_{\text{tang}} = V \cos \alpha - V \sin \alpha \cot \varphi$$

$$u_{\text{norm}} = 0$$

Wij zien dan, dat deze totale snelheid nul is in de punten, bepaald door

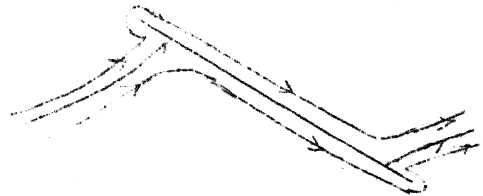
$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi$$

of wel

$$\varphi = \alpha \text{ en } \varphi = \pi + \alpha.$$

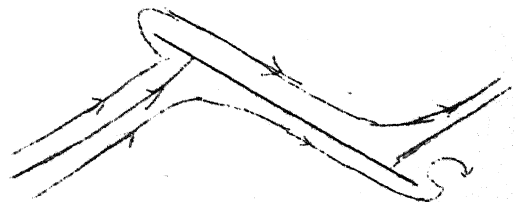
De achterrand van de plaat komt overeen met  $\varphi = 0$ , de voorkant met  $\varphi = \pi$ , zodat een stuwpunt aan de bovenkant ligt vlak achter de achterrand en een stuwpunt aan de onderkant vlak achter de voorrand.

De stroomlijn, die uit het oneindige komt en dit eerste stuwpunt treft, splitst zich hier in tweeën en omstroomt het profiel aan de achterkant en voorkant. Bij het tweede stuwpunt verenigen de twee takken zich weer.



Nu is aan formule (6) te zien, dat voor  $\varphi = 0$ , d.i. aan de achterkant de snelheid oneindig wordt. (Ook voor  $\varphi = \pi$ , aan de voorkant). Bij werkelijke profielen in de voorkant afgerond, zodat hier de top afgevlakt wordt, maar de achterkant is scherp.

In een werkelijke stroming zal, als de vleugel vanuit de rust een versnelde beweging gaat uitvoeren (start) tot aan de snelheid  $V$ , in het eerste ogenblik het hier beschreven stromingsbeeld optreden. Daar aan de achterrand de druk zeer laag is (oneindige snelheid) en deze over een zeer korte afstand moet toenemen tot de rustdruk in het stuwpunt, kan door de invloed van de viscositeit de stroming niet meer langs het profiel liggen; er zal zich een werveltje vormen, dat achterblijft, terwijl het draagvlak zich voortbeweegt. Maar onder invloed van deze wervel zal het stromingsbeeld om het profiel zich wijzigen en wel zal die wervel zolang aangroeien, dat



het achterste stuwpunt samen gaat vallen met de achterrand. Als nu de translatiesnelheid steeds toeneemt, gaat dit proces van wervelvorming door, zodat een gehele wervelstraat achter het profiel is gevormd. Wanneer de constante translatiesnelheid  $V$  is bereikt, worden geen nieuwe wervels meer gevormd, zodat op de startplaats een wervelgebied overblijft.

Wij zullen dit proces niet mathematisch vervolgen, maar alleen de stationnaire eindtoestand beschouwen.

In dit geval idealiseren wij de startwervel tot een geconcentreerde wervel op zeer grote (oneindige) afstand van het draagvlak.

Wij hadden het buitengebied van het profiel afgebeeld op het binnengebied van de cirkel en vinden nu de startwervel terug in de oorsprong, die overeenkomt met het oneindig verre punt van de x-as. Zij heeft een zodanige grootte, dat het tweede stuwpunt aan de achterrand van het draagvlak ligt. De potentiaal van een wervel in de oorsprong ter sterkte  $\Gamma$  is gegeven door

$$\varphi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta \quad (8)$$

De bijbehorende tangentiele snelheid langs de omtrek van de plaat is

$$u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{-1}{l \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = \frac{-\Gamma}{2\pi l \sin \vartheta} \quad (9)$$

Om te bereiken, dat de snelheid aan de achterkant van de plaat nul wordt, moet voor  $\vartheta \rightarrow 0$

$$\sin \vartheta (u_1 + u_2) \rightarrow 0$$

dus

$$-V \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi l} = 0$$

$$\Gamma = -2\pi l V \sin \alpha \quad (10)$$

Hiermede is in het stationnaire geval de gehele snelheidsverdeling langs het draagvlak bepaald en dus ook de drukverdeling, die gevonden wordt uit de gelineariseerde wet van Bernoulli:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -V \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Voor de druksprong  $\Delta p = p_{\text{bov}} - p_{\text{onder}}$  geldt dan

$$\Delta p = p_{\text{bov}} - p_{\text{ond}} = -\rho V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\text{bov}} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\text{ond}} \right] =$$

$$+\rho V^2 \sin \alpha \left[ \cot \vartheta - \cot(2\pi - \vartheta) + \frac{1}{\sin \vartheta} - \frac{1}{\sin(2\pi - \vartheta)} \right] =$$

$$2\rho V^2 \sin \alpha \cot \frac{1}{2} \vartheta \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad (11)$$

De totale kracht wordt gevonden door integratie over de gehele plaat

$$K = \int_{-l}^{+l} \Delta p dx = -2\rho V^2 l \sin \alpha \int_{\pi}^0 \cot \frac{1}{2} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = +2\pi \rho V^2 l^2 \sin \alpha \quad (12)$$

en voor het moment om de oorsprong vinden wij

$$M = \int_{-l}^{+l} \Delta p x dx = -2\rho V^2 l^2 \sin \alpha \int_{\pi}^0 \cot \frac{1}{2} \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \pi \rho V^2 l^3 \sin \alpha \quad (13)$$

## 8. Het trillende draagvlak.

Wij hebben in het voorgaande het effect gezien van een met de tijd variërende snelheidsverdeling op het draagvlak, n.l. het achterblijven van wervels terwijl het draagvlak zich voortbeweegt, of, indien het coördinatenstelsel aan het draagvlak wordt bevestigd, het ontstaan van wervels, die met de stroom worden meegevoerd.

In het geval van een trillend draagvlak, zullen er achter het draagvlak periodiek wervels losgelaten worden. Deze losgelaten wervels zullen een wervellaag vormen van periodieke structuur, waarbij iedere wervel de sterkte zal behouden, die hij had op het ogenblik, dat hij losgelaten werd.

De vroeger gevonden reguliere oplossing van het probleem van het trillende draagvlak varieerde harmonisch met de tijd met frequentie  $\nu$ , zodat voor de losgelaten wervels aan de achterkant geldt

$$\gamma(l,t) = \gamma \cdot e^{i\nu t}$$

Om de wervelsterkte in het punt  $x$  van het zog te vinden, merken we op, dat de achterrand van het draagvlak zich op het ogenblik  $t' = t - \frac{x-l}{V}$  in  $x$  bevond, zodat de wervelsterkte daar bedraagt

$$\gamma(x,t) = \gamma \cdot e^{i\nu(t - \frac{x-l}{V})} \quad (1)$$

Om nu het veld van deze wervellaag te berekenen in aanwezigheid van het draagvlak beschouwen wij weer het  $\rho, \nu$  vlak. De wervel in het punt  $x_0$  wordt afgebeeld op een wervel in het punt  $\rho_0, \nu=0$ . Het veld van

deze wervel is gegeven door

$$\varphi_I = \frac{\Gamma}{2\pi} \psi_1,$$

waarbij  $\psi_1$  de hoek is die de voerstraal naar  $P$  met de as

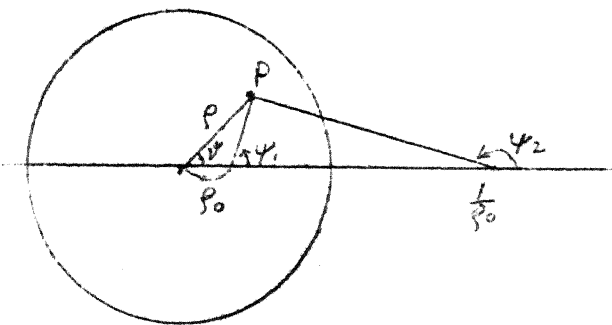
$\nu=0$  maakt. De cirkel zal stroomlijn zijn, als in het punt  $\frac{1}{\rho_0}$  een even grote maar tegengestelde wervel wordt aangebracht die een veld

$$\varphi_{II} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \psi_2$$

oplevert. Het totale veld van deze wervels is dan

$$\varphi_I + \varphi_{II} = \frac{\Gamma}{2\pi} (\psi_1 - \psi_2) \quad (2)$$

De equipotentiaallijnen  $\varphi = \text{const.}$  vormen een cirkelbundel door de punten  $\rho_0$  en  $\frac{1}{\rho_0}$ , de stroomlijnen vormen de toegevoegde cirkelbundel,



waartoe de cirkel  $\rho = 1$  behoort.

De analytische uitdrukking van de snelheidspotential van één wervel is in de coördinaten  $\rho$  en  $\vartheta$

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \lg \frac{\rho \sin \vartheta}{\rho \cos \vartheta - \rho_0} - \lg \frac{\rho \sin \vartheta}{\rho \cos \vartheta - \frac{1}{\rho_0}} \right] \quad (3)$$

Het totale veld van de zogwervels wordt nu gevonden door integratie<sup>1)</sup>

$$\varphi_2(\rho, \vartheta) = \frac{\gamma \cdot e^{i\gamma(t + \frac{\ell}{V})}}{2\pi} \cdot \int_{\ell}^{\infty} e^{-\frac{i\gamma x_0}{V}} \left\{ \lg \frac{\rho \sin \vartheta}{\rho \cos \vartheta - \frac{1}{\rho_0}} \right\} dx_0 \quad (4)$$

De horizontale snelheid op het draagvlak is

$$u_2 = \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{y=0} = \frac{-1}{\rho \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} \right)_{\rho=1} = \frac{\gamma \cdot e^{i\gamma(t + \frac{\ell}{V})}}{2\pi \rho \sin \vartheta} \cdot \int_{\ell}^{\infty} e^{-\frac{i\gamma x_0}{V}} \cdot \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2 + 1 - 2\rho_0 \cos \vartheta} \cdot \frac{dx_0}{\ell} \quad (5)$$

De waarde van  $\gamma$  wordt nu bepaald uit de voorwaarde, dat in het achterste punt van het draagvlak, dus voor  $\vartheta = 0$  de totale snelheid eindig moet blijven.

De snelheid van de reguliere potential is gegeven door (6.6) zodat de voorwaarde

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} (u_1 + u_2) \sin \vartheta = 0$$

de vorm krijgt

$$\frac{\ell}{\pi} \int_0^{\pi} V(\vartheta) \cdot (1 + \cos \vartheta) d\vartheta = \frac{\gamma \cdot e^{i\gamma(t + \frac{\ell}{V})}}{2\pi} \cdot \int_{\ell}^{\infty} e^{-\frac{i\gamma x_0}{V}} \cdot \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2 + 1 - 2\rho_0 \cos \vartheta} \cdot \frac{dx_0}{\ell} \quad (6)$$

De tweede integraal zal later herleid worden.

Wij beschouwen nu eerst de drukverdeling.

Volgens (3.4) is het verschil in druk tussen boven- en onderkant van het draagvlak gegeven door

$$\frac{\Delta p}{\rho} = - \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{\text{bov.}} - \varphi_{\text{ond.}}) - V \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{\text{bov.}} - \varphi_{\text{ond.}}) = -i\gamma (\varphi_{\text{bov.}} - \varphi_{\text{ond.}}) - V (u_{\text{bov.}} - u_{\text{ond.}}) \quad (7)$$

Bij een beschouwing van de formules blijkt, dat  $\varphi_{\text{ond.}} - \varphi_{\text{bov.}} = -\varphi$  en  $u_{\text{ond.}} = -u_{\text{bov.}} = -u$ , zodat

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -2V \left\{ \frac{i\gamma}{V} (\varphi_1 + \varphi_2) + u_1 + u_2 \right\} \quad (8)$$

1) Voor de convergentie van deze en volgende integralen is het nodig te veronderstellen dat  $\text{Im } \gamma < 0$ ; de resultaten van het grensgeval volgen dan door analytische voortzetting.

waarbij  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  (en  $u_1, u_2$ ) de bijdragen van het reguliere resp. singuliere stuk van het veld zijn.

De drukverdeling van het reguliere veld is teeds gegeven in (6.9) zodat we hier alleen het singuliere stuk berekenen.

$$\frac{\Delta p_2}{\rho} = -2V \left\{ \frac{iv}{V} \varphi_2 + u_2 \right\}_{\rho=1} \quad (9)$$

Hierin is

$$\begin{aligned} \frac{iv}{V} \varphi_2 &= \frac{-\gamma \cdot e^{iv(t+\frac{l}{V})}}{2\pi} \cdot \int_l^\infty \left\{ b_2 \operatorname{tg} \frac{\sin v}{\cos v - \rho_0} - b_2 \operatorname{tg} \frac{\sin v}{\cos v - \frac{1}{\rho_0}} \right\} d e^{-ivx_0} = \\ &= \frac{-\gamma \cdot e^{iv(t+\frac{l}{V})}}{2\pi} \cdot \left\{ \left[ b_2 \operatorname{tg} \frac{\sin v}{\cos v - \rho_0} - b_2 \operatorname{tg} \frac{\sin v}{\cos v - \frac{1}{\rho_0}} \right] - 2 \int_l^\infty e^{-\frac{ivx_0}{V}} \frac{\sin v}{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos v} \frac{d\rho_0}{dx_0} dx_0 \right\} \\ &= \frac{4\gamma}{2\pi l} e^{iv(t+\frac{l}{V})} \cdot \int_l^\infty e^{-\frac{ivx_0}{V}} \frac{\sin v}{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos v} \cdot \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1} dx_0, \quad (10) \end{aligned}$$

daar de geïntegreerde termen wegvallen.

Dan wordt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_2}{\rho} &= -2V \frac{\gamma e^{iv(t-\frac{l}{V})}}{2\pi l \sin v} \int_l^\infty e^{-\frac{ivx_0}{V}} \cdot \left\{ \frac{4\rho_0^2 \sin^2 v}{(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos v)(\rho_0^2 - 1)} + \frac{\rho_0^2 - 1}{(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos v)} \right\} dx_0 \\ &= \frac{-V\gamma \cdot l}{\pi l \sin v} \cdot e^{ivt} \int_l^\infty e^{-\frac{ivx_0}{V}} \cdot \frac{4\rho_0^2 \sin^2 v + (\rho_0^2 - 1)^2}{(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos v)(\rho_0^2 - 1)} dx_0 = \\ &= \frac{-V\gamma e^{iv\frac{l}{V}} \cdot e^{ivt}}{\pi l \sin v} \cdot \int_l^\infty e^{-\frac{ivx_0}{V}} \cdot \frac{1 + \rho_0^2 + 2\rho_0 \cos v}{\rho_0^2 - 1} dx_0. \quad (11) \end{aligned}$$

Voor de verdere herleiding van deze integraal merken wij op, dat

$$\frac{1}{2} \left( \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \right) = V \sqrt{\left( \frac{x_0}{l} \right)^2 - 1},$$

zodat

$$\frac{\Delta p_2}{\rho} = - \frac{V\gamma \cdot e^{\frac{ivl}{V}} \cdot e^{ivt}}{\pi \sin v} \cdot \int_l^\infty e^{-\frac{ivx_0}{V}} \cdot \frac{\frac{x_0}{l} + \cos v}{\sqrt{\left( \frac{x_0}{l} \right)^2 - 1}} d \frac{x_0}{l} \quad (12)$$

De integralen kunnen uitgedrukt worden in functies van Hankel.

$$H_0^{(2)}(\omega) = \frac{2i}{\pi} \int_1^\infty e^{-i\omega \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (13)$$

$$H_1^{(2)}(\omega) = -\frac{dH_0^{(2)}(\omega)}{d\omega} = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty e^{i\omega \xi} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (14)$$

Dan wordt

$$\frac{\Delta p_2}{\rho} = \frac{V}{2} \cdot \frac{\gamma e^{\frac{i\gamma l}{V}} e^{i\gamma t}}{\sin \gamma} \left\{ H_1^{(2)}(\omega) + i H_0^{(2)}(\omega) \cos \gamma \right\} \quad (15)$$

waarin  $\omega = \frac{\gamma l}{V}$

Verder kan nu de uitdrukking voor  $\gamma$  herleid worden

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) (1 + \cos \gamma_1) d\gamma_1 &= \gamma e^{\frac{i\gamma l}{V}} \int_l^\infty e^{-i\omega x_0} \cdot \frac{\rho_0^2 + 1 + 2\rho_0}{\rho_0^2 - 1} d\frac{x_0}{l} = \\ &= -\gamma e^{\frac{i\gamma l}{V}} \frac{\pi}{2} \left\{ H_1^{(2)}(\omega) + i H_0^{(2)}(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

zodat

$$\frac{\Delta p_2}{\rho} = -\frac{2V e^{i\gamma t}}{\pi \sin \gamma} \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) (1 + \cos \gamma_1) d\gamma_1 \frac{H_1^{(2)}(\omega) + i H_0^{(2)}(\omega) \cos \gamma}{H_1^{(2)}(\omega) + i H_0^{(2)}(\omega)} \quad (17)$$

Küssner voert nu in de  $T(\omega)$  functie

$$T(\omega) = \frac{H_1^{(2)}(\omega) - i H_0^{(2)}(\omega)}{H_1^{(2)}(\omega) + i H_0^{(2)}(\omega)}$$

zodat de totale drukverdeling wordt (met 6.9)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho} &= \frac{V e^{i\gamma t}}{\pi} \left[ - \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) (1 + \cos \gamma_1) d\gamma_1 \left\{ \frac{1+T}{2} + \frac{1-T}{2} \cos \gamma \right\} \cdot \frac{2}{\sin \gamma} + \right. \\ &\quad \left. + i\omega \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) \ln \frac{1 - \cos(\gamma - \gamma_1)}{1 - \cos(\gamma + \gamma_1)} \cdot \sin \gamma_1 d\gamma_1 - \frac{2}{\sin \gamma} \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) \frac{\sin^2 \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \cos \gamma} d\gamma_1 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Deze uitdrukking kan in een iets eenvoudiger vorm gebracht worden door de herleiding

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin^2 \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \cos \gamma} &= \frac{1}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \cos \gamma} = \\ &= \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma_1 - \cos \gamma} - \frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma}{\sin \gamma} \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho} &= \frac{2V}{\pi} e^{i\gamma t} \left[ - \left\{ \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) d\gamma_1 \frac{1+T}{2} - \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) d\gamma_1 \frac{1-T}{2} \right\} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\omega}{2} \int_0^\pi \gamma(\gamma_1) \ln \frac{1 - \cos(\gamma - \gamma_1)}{1 - \cos(\gamma + \gamma_1)} \sin \gamma_1 d\gamma_1 - \sin \gamma \int_0^\pi \frac{\gamma(\gamma_1) d\gamma_1}{\cos \gamma_1 - \cos \gamma} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Daar

$$\frac{2 \sin \vartheta}{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta} = \frac{2}{2\vartheta_1} \ln \frac{1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)}{1 - \cos(\vartheta_1 + \vartheta)}$$

En (19) verder door partiële integratie geschreven worden als:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{2V\ell}{\pi} e^{i\vartheta t} \left[ -\left\{ \frac{1+T}{2} \int_0^\pi r(\vartheta_1) d\vartheta_1 - \frac{1-T}{2} \int_0^\pi r(\vartheta_1) \cos \vartheta_1 d\vartheta_1 \right\} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ -\frac{dr(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} + i\omega r(\vartheta_1) \sin \vartheta_1 \right\} \ln \frac{1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)}{1 - \cos(\vartheta_1 + \vartheta)} \cdot d\vartheta_1 \right] = \frac{V}{\pi} e^{i\vartheta t} \Pi(\vartheta) \quad (20)$$

### 9. Berekening van de kracht en het moment om de oorsprong.

De kracht en het moment om de oorsprong kunnen nu door integratie gevonden worden uit (8.20)

$$K = \int_{-l}^{+l} \Delta p dx = \frac{\rho V \ell}{\pi} e^{i\vartheta t} \int_0^\pi \Pi(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (1)$$

$$M = \int_{-l}^{+l} \Delta p x dx = \frac{\rho}{\pi} V \ell^2 e^{i\vartheta t} \int_0^\pi \Pi(\vartheta) \cos(\vartheta) \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \\ \frac{\rho}{2\pi} V \ell^2 e^{i\vartheta t} \int_0^\pi \Pi(\vartheta) \sin 2\vartheta d\vartheta \quad (2)$$

Hiervuit volgt, dat K en M met de eerste en tweede coëfficiënt van de Fourier ontwikkeling van de drukverdeling naar  $\vartheta$  samenhangen. Allereerst is

$$\int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi (1 - \cos \vartheta) d\vartheta = \pi \quad (3)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \sin 2\vartheta d\vartheta = 2 \int_0^\pi (1 - \cos \vartheta) d\vartheta = \int_0^\pi (2 \cos \vartheta - 1 - \cos 2\vartheta) d\vartheta = \\ -\pi \quad (4)$$

De Fourier ontwikkeling van

$$\ln \frac{1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)}{1 - \cos(\vartheta_1 + \vartheta)} = 2 \ln \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta)}{\sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta)} \right|$$

vinden wij door uit te gaan van:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (5)$$

zodat

$$\ln(1 - e^{i\varphi}) = \ln e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \cdot 2i \sin \frac{1}{2} \varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\varphi}}{n} =$$



$$= \frac{1}{2} i \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \ln |2 \sin \frac{1}{2} \varphi| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \varphi}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \varphi}{n} \quad (6)$$

Splitsing in reële en imaginaire delen levert dan

$$\ln |2 \sin \frac{1}{2} \varphi| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \varphi}{n}, \quad (7)$$

waaruit volgt

$$\ln \left| \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_1)}{2 \sin \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1)} \right| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n (\varphi - \varphi_1) - \cos n (\varphi + \varphi_1)}{n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \varphi \cdot \sin n \varphi_1}{n} \quad (8)$$

Dus

$$\int_0^{\pi} \ln \frac{1 - \cos (\varphi - \varphi_1)}{1 - \cos (\varphi + \varphi_1)} \cdot \sin n \varphi \, d\varphi = -2\pi \frac{\sin n \varphi_1}{n} \quad (9)$$

en de formules voor K en M worden

$$K = 2\rho V l e^{i\nu t} \left[ -\left\{ \frac{1+T}{2} \int_0^{\pi} v(\varphi_1) d\varphi_1 - \frac{1-T}{2} \int_0^{\pi} v(\varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 \right\} - \right. \\ \left. - \int_0^{\pi} \left\{ \frac{dv(\varphi_1)}{d\varphi_1} + i\omega v(\varphi_1) \sin \varphi_1 \right\} \sin \varphi_1 d\varphi_1 \right] \quad (10)$$

$$M = \rho V l^2 e^{i\nu t} \left[ \left\{ \frac{1+T}{2} \int_0^{\pi} v(\varphi_1) d\varphi_1 - \frac{1-T}{2} \int_0^{\pi} v(\varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left\{ -\frac{dv(\varphi_1)}{d\varphi_1} + i\omega v(\varphi_1) \sin \varphi_1 \right\} \sin 2\varphi_1 d\varphi_1 \right] \quad (11)$$

Het ligt voor de hand deze resultaten uit te drukken in de Fourier coëfficiënten van de functie  $v(\varphi_1)$

$$v(\varphi_1) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \varphi_1, \quad (12)$$

waarbij

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(\varphi_1) \cos n \varphi_1 d\varphi_1 \quad (13)$$

Dan wordt, na partiële integratie

$$K = \pi \rho V l e^{i\nu t} \left[ -\frac{1+T}{2} (a_0 + a_1) - i\omega \frac{(a_0 - a_2)}{2} \right] \quad (14)$$

$$M = \pi \rho V l^2 e^{i\nu t} \left[ \frac{1+T}{4} (a_0 + a_1) - \frac{1}{2} (a_1 - a_2) - \frac{i\omega}{8} (a_1 - a_3) \right] \quad (15)$$

Het trillende draagvlak bij supersone snelheden.

Inleiding.

Als tegenhanger voor de vroeger gegeven behandeling van het trillende draagvlak in incompressibele stroming, (voerende tot de potentiaalvergelijking) kan het trillende draagvlak in een supersone stroming beschouwd worden. In dit geval speelt de compressibiliteit van de lucht een rol en wel wordt de vergelijking voor de snelheids-potentiaal hyperbolisch en heeft de oplossing principieel verschillende eigenschappen.

Het tussenliggende geval van zo grote snelheden, dat de samendrukbaarheid van de lucht in rekening moet worden gebracht, maar de geluidssnelheid niet overschreden wordt, leidt tot een zeer gecompliceerd vraagstuk, dat samenhangt met de diffractietheorie van het geluid (of licht). Dit geval komt hier niet ter sprake.

De oplossingsmethode, die hier gekozen wordt, is de methode van Riemann, die als tegenhanger geldt voor de vroeger gekozen methode van Green voor de potentiaalvergelijking.

1. De vergelijking voor de snelheidspotentiaal.

Voor het geval, dat de snelheden zo groot zijn, dat de lucht als samendrukbaar beschouwd moet worden, blijven de bewegingsvergelijkingen dezelfde, n.l.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (2)$$

maar de continuïteitsvergelijking neemt de vorm aan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

terwijl het verband tussen  $\rho$  en  $p$  wordt gegeven door de wet van Poisson voor adiabatische toestandsveranderingen

$$\frac{p}{p_\infty} = \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \quad (4)$$

Wij gaan nu direct lineariseren en denken het snelheidsveld opgebouwd uit een translatie met grote snelheid  $V$  en een storingsveld met componenten  $u$  en  $v$ , zodat

$$\begin{aligned} \bar{u} &= V + u & \bar{p} &= p_\infty + p \\ \bar{v} &= v & \rho &= \rho_\infty + \Delta \rho \end{aligned}$$

Uit (4) volgt, dat bij benadering

$$1 + \frac{\Delta p}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma = 1 + \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} \quad (5)$$

dus

$$\Delta p = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \Delta \rho \quad (6)$$

waarbij

$$\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_\infty = c^2 \quad (7)$$

de dimensie  $\frac{\text{kgm sec}^{-2} \text{ m}^{-2}}{\text{kgm m}^{-3}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2$  heeft en c dus een snelheid, de geluidssnelheid voorstelt.

Dan gaan (1) en (2) over bij verwaarlozing van kleine termen over in

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{c^2}{\rho_\infty} \cdot \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{c^2}{\rho_\infty} \cdot \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

terwijl de continuïteitsverg. wordt:

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} + \rho_\infty \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

Indien de stoorstroming verveelvrij is, bestaat een snelheidspotentiaal  $\varphi$ , zodat

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (10)$$

en de vergelijkingen (8) en (9) worden

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho_\infty} \Delta \rho \right\} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho_\infty} \Delta \rho \right\} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} + \rho_\infty \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (12)$$

Uit (11) volgt na integratie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \varphi + \frac{c^2}{\rho_\infty} \Delta \rho = f(t) \quad (13)$$

waarbij  $f(t)$  een willekeurige functie van  $t$  alleen voorstelt, die in het oneindige nul moet zijn en dus identiek nul is.

Dan is

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} = - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (14)$$

en substitutie in (12) levert de vergelijking voor  $\varphi$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right) - \frac{V}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0$$

of wel

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2V}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

De druk in het veld volgt uit (14)

$$\frac{\Delta p}{\rho_\infty} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (16)$$

## 2. Het randvoorwaardeprobleem voor harmonische trillingen.

Indien het veld periodiek verandert, kunnen we stellen

$$\varphi(x, y, t) = e^{i\nu t} \cdot \psi(x, y) \quad (1)$$

Substitutie in (1.15) geeft dan

$$\left(1 - V^2 c^{-2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{2i\nu V}{c^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\nu^2}{c^2} \cdot \psi = 0 \quad (2)$$

Indien  $V > c$  is, d.w.z., dat de ongestoorde snelheid groter is dan de geluidssnelheid, is (2) een hyperbolische differentiaalvergelijking.

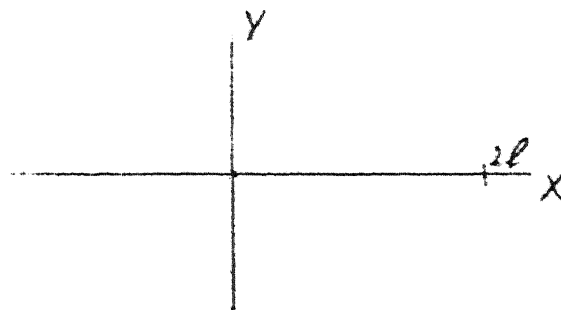
De randvoorwaarden zijn hier, evenals vroeger gegeven door de voorgeschreven beweging van de profielcontour.

We leggen hier de oorsprong in het voorste punt.  $y=0$   $0 < x < 2\ell$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = w(x) \cdot e^{i\nu t} \quad (3)$$

of wel

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = w(x). \quad (4)$$



De vergelijking neemt een iets eenvoudiger vorm aan door de substitutie

$$\psi = e^{\alpha x} \cdot \chi(x, y), \quad (5)$$

waarbij  $\alpha$  zo is gekozen, dat de term met  $\frac{\partial \chi}{\partial x}$  verdwijnt.

$$(1 - M^2) \cdot \left\{ \alpha^2 \chi + 2\alpha \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right\} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \frac{2i\nu V}{c^2} \left\{ \alpha \chi + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\} + \frac{\nu^2}{c^2} \chi = 0$$

Dus

$$2(1 - M^2)\alpha = \frac{2i\nu V}{c^2},$$

$$\alpha = \frac{i\nu V}{c^2(1 - M^2)} \quad (6)$$

en de vergelijking wordt:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\nu^2}{c^2(1 - M^2)} \chi = 0 \quad (7)$$

of, met

$$M^2 - 1 = \beta^2$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \frac{\nu^2}{c^2 \beta^2} \chi \quad (8)$$

een vergelijking, die bekend staat als de vergelijking van de telegraaf.

De randvoorwaarde wordt

$$y=0 \quad 0 < x < +2\ell \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = e^{-\alpha x} w(x) \quad (9)$$

### 3. Het stationnaire geval.

In het stationnaire geval is de oplossing zeer eenvoudig.  
Hier is  $\psi = 0$  en

$$\varphi(x, y, t) = \psi(x, y) = \chi(x, y).$$

voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

met de randvoorwaarde

$$y=0 \quad 0 < x < +2\ell \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = w(x) \quad (2)$$

en een voorwaarde in het oneindige  $x \rightarrow -\infty \quad \chi = 0$ .

De algemene oplossing van (1) kan direct worden opgeschreven, zij luidt

$$\chi(x, y) = f(x - \beta y) + g(x + \beta y) \quad (3)$$

waarbij  $f$  en  $g$  willekeurig zijn.

Beschouw nu eerst alleen de bovenhelft van het vlak.

Daar voor  $x \rightarrow -\infty \quad \chi = 0$  moet zijn, moet  $g(x + \beta y) = 0$  zijn,

De oplossing heeft dus de vorm

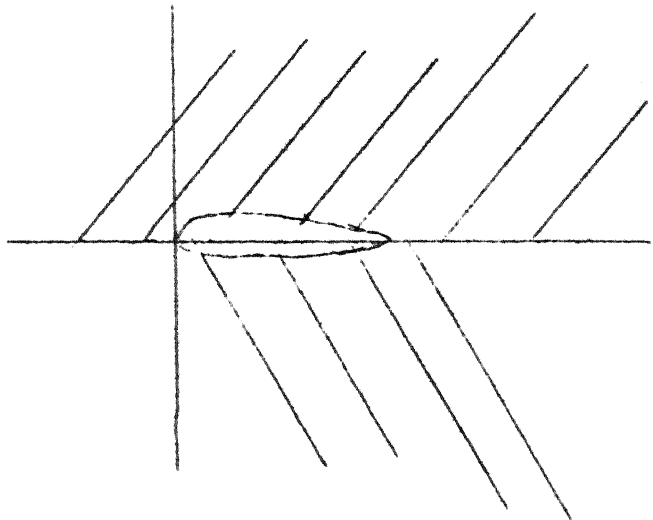
$$\chi(x, y) = f(x - \beta y)$$

en heeft dus dezelfde waarde op alle lijnen

$$x - \beta y = \text{const.}$$

Deze lijnen (en de lijnen  $x + \beta y = \text{const.}$ ) heten de karakteristieken van de verg.

Alleen de karakteristieken, die naar achter lopen, dragen bij tot de oplossing. De functie  $f$  kan direct gevonden worden, daar voor  $y = 0$



$$0 < x < +2\ell$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = -\beta f'(x) = w(x)$$

dus

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{\beta} w(x)$$

$$f(x) = -\frac{1}{\beta} \int_0^x w(z) dz$$

en de oplossing is.

$$\chi(x, y) = -\frac{1}{\beta} \cdot \int_0^{x - \beta y} w(z) dz.$$

Nu is  $w(x) = 0$  voor  $x < 0$  en voor  $x > +2l$ , zodat we zien, dat de invloed van het draagvlak in dit stationnaire geval alleen beperkt blijft tot een strook, begrensd door de karakteristieken door voor- en achterkant.

In het beneden halfvlak wordt de oplossing op volkomen analoge wijze gevonden, alleen moeten we de karakteristieken  $x - \beta y = \text{const.}$  vervangen door  $x + \beta y = \text{const.}$

De karakteristieken zijn lijnen, waarlangs storingen d.w.z. veranderingen in  $w(x)$  zich voortplanten.

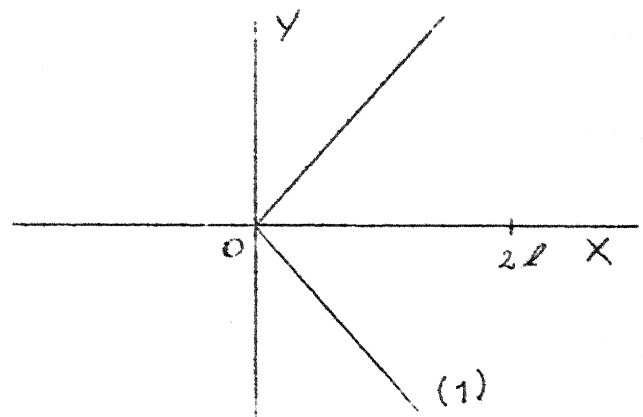
In het gehele gebied voor de karakteristiek door de oorsprong is dus ongestoorde stroming. We hadden dus ook kunnen stellen, dat langs de gehele karakteristiek  $\varphi = 0$  moest zijn.

#### 4. Het instationnaire geval.

In het instationnaire geval is de vergelijking gegeven door (2.7) met de randvoorwaarde (2.8), terwijl ook voor een tweede randvoorwaarde wordt opgeleverd door de eis, dat voor het draagvlak ongestoorde stroming heerst en dus voor  $x = -\infty$ ,  $\varphi = 0$  is.

Ook hier planten storingen zich langs de karakteristieken voort en we kunnen dus als randwaarden stellen, dat langs de gehele karakteristiek door 0 met uitzondering van  $y = 0$   $\varphi = 0$  is. Om de vergelijking (2.7) op eenvoudiger vorm te brengen, transformeren we op de karakteristieken als coördinaten

$$\begin{aligned}\xi &= x - \beta y \\ \eta &= x + \beta y\end{aligned}$$



Dan gaat de vergelijking over in

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} = -\lambda^2 \cdot \chi \quad (2)$$

waarbij

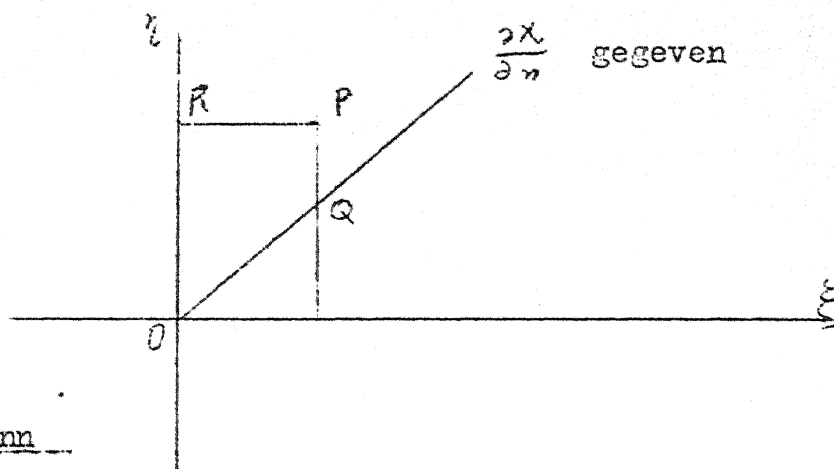
$$\lambda = \frac{\nu}{2c\beta^2} = \frac{\nu}{2c\sqrt{M^2 - 1}} \quad (3)$$

Wij beschouwen eerst alleen de bovenhelft van het vlak. De randvoorwaarden worden nu

$$\begin{aligned}y = 0 & \quad \xi = \eta & \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\beta \left( \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) = e^{-\alpha x} w(x) \\ x - \beta y = 0 & \quad \xi = 0 & \quad \chi = 0 \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0\end{aligned}$$

De sector tussen de karakteristiek en de x-as in het x,y vlak wordt afgebeeld op de sector tussen de lijnen

$$\xi = \eta \text{ en } \xi = 0$$



### 5. De methode van Riemann

Analoog aan de methode van Green voor het incompressibele geval kan het supersonische probleem opgelost worden in de vorm van een integraalvoorstelling voor de snelheidspotentiaal, waarin optreden de gegeven randwaarden vermenigvuldigd met een speciale oplossing van de differentiaalvergelijking.

Beschouw twee oplossingen  $\chi$  en  $\psi$  van (4.2)

$$L[\chi] = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda^2 \chi = 0 \quad (1)$$

en vorm de integraal

$$0 = \iint_{OPQR} \{ \chi L[\psi] - \psi L[\chi] \} d\xi d\eta = \iint_{OPQR} \left\{ \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \psi \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} \right\} d\xi d\eta \quad (2)$$

uitgedrukt over een gebied, begrensd door 2 segmenten van de karakteristieken door P en de lijnsegmenten OP en OR, waarop de randwaarden zijn voorgeschreven.

Hu is

$$\chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \psi \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right\} \quad (3)$$

Stellen we

$$P = \frac{1}{2} \left\{ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right\}, \quad (4)$$

$$Q = \frac{1}{2} \left\{ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right\},$$

dan is volgens de stelling van Gauss

$$\iint \left\{ \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right\} d\xi d\eta = \oint (P d\eta - Q d\xi),$$

zodat

$$0 = \frac{1}{2} \oint \left[ \left\{ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right\} d\eta - \left\{ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right\} d\xi \right], \quad (5)$$

waarbij de integratie wordt uitgestrekt langs de lijn OQPRO.

Langs QP is  $d\xi = 0$  en  $\xi = \xi_P$ , dus de bijdrage is

$$- \int_{\xi_P}^{\eta_P} \left\{ \chi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} - \mathcal{V} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right\} d\eta = \chi_P \mathcal{V}_P - \chi_Q \mathcal{V}_Q - 2 \int_{\xi_P}^{\eta_P} \chi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} d\eta$$

langs ER is  $d\eta = 0$  en  $\eta = \eta_P$ , zodat de bijdrage tot de integraal is

$$\int_{\xi_P}^0 \left\{ \chi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} - \mathcal{V} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right\} d\xi = \mathcal{V}_P \cdot \chi_P - \mathcal{V}_R \cdot \chi_R + 2 \int_{\xi_P}^0 \chi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} d\xi$$

langs OR is  $\chi = \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0$ , dus de bijdrage tot de integraal is nul.

De bijdrage langs OQ neemt een eenvoudiger vorm aan, als wij terugtransformeren naar het x,y-vlak.

Daar langs OQ  $\xi = \eta = x$  is, is

$$d\xi = d\eta = dx$$

en verder is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -\beta \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right\} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} &= -\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} \right\}, \end{aligned}$$

zodat langs OQ

$$\begin{aligned} & \int_0^Q \left[ \left\{ \chi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} - \mathcal{V} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right\} d\eta - \left\{ \chi \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} - \mathcal{V} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right\} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{x_P} \left\{ \chi(x) \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)_{y=0} - \mathcal{V}(x) \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_{y=0} \right\} dx. \end{aligned}$$

Indien wij nu de functie  $\mathcal{V}$  zo kunnen bepalen, dat langs de karakteristieken  $\xi = \xi_P$  en  $\eta = \eta_P$   $\mathcal{V}(\xi, \eta, \xi_P, \eta_P)$  de constante waarde 1 heeft, is

$$2\chi(x_P, y_P) = \chi(x_P, 0) - \frac{1}{\beta} \int_0^{x_P} \left\{ \chi(x) \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)_{y=0} - \mathcal{V}(x) \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_{y=0} \right\} dx. \quad (6)$$

Hierbij is  $\left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_{y=0}$  gegeven, maar niet  $\chi(x)$  op de x-as.

## 6. De functie van Riemann en de oplossing van het probleem.

Daar de functie  $\mathcal{V}(\xi, \eta)$  een constante waarde moet aannemen langs de lijnen  $\xi = \xi_P$   $\eta = \eta_P$  ligt het voor de hand een nieuwe variabele in te voeren

$$r = \sqrt{(\xi - \xi_P)(\eta - \eta_P)} \quad (1)$$

en te stellen

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(r) \quad (2)$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta - \eta_P}{\xi - \xi_P}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dr}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{d^2 \mathcal{V}}{dr^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4r} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dr}, \end{aligned}$$



zodat de vergelijking voor  $\mathcal{V}$  wordt

$$\frac{d^2 \mathcal{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{V}}{dr} + 4\lambda^2 \mathcal{V} = 0 \quad (3)$$

Dit is de vergelijking van Bessel; de oplossing, die voor  $r = 0$  de waarde 1 heeft, is

$$\mathcal{V}(r) = J_0(2\lambda r) = J_0\{2\lambda \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}\} = J_0\{2\lambda \sqrt{(x-x_p)^2 - \beta^2(y-y_p)^2}\} \quad (4)$$

Men geeft (5.6)

$$2\chi(x_p, y_p) = \chi(x_p, 0) - \frac{1}{\beta} \int_0^{x_p} \left[ \chi(x) \left( \frac{\partial J_0}{\partial \eta} \right)_{y=0} - \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_{y=0} \cdot J_0 \right] dx$$

Nu is

$$\left( \frac{\partial J_0}{\partial y} \right)_{y=0} = -J_1\{2\lambda \sqrt{(x-x_p)^2 - \beta^2 y_p^2}\} \frac{2\lambda \beta^2 y_p}{\sqrt{(x-x_p)^2 - \beta^2 y_p^2}}$$

Op het draagvlak kunnen we nu de waarden van  $\chi(x_p, 0)$  vinden, die nog in (5.6) ontbraken

$$\chi(x_p) = \frac{1}{\beta} \int_0^{x_p} J_0\{2\lambda(x-x_p)\} \cdot \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_{y=0} dx \quad (5)$$

Hiermede is dus de snelheidspotentiaal volledig bepaald. Voor de berekening van de drukverdeling is alleen nodig de waarde van  $\varphi$  op het draagvlak en de waarde van de horizontale snelheid.

Daar

$$\varphi(x_p, t) = e^{i\omega t} \cdot \psi(x_p) = e^{i\omega t + \alpha x_p} \cdot \chi(x_p) \quad (6)$$

is het drukverschil met de ongestoorde stroming.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho \omega} &= - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = - \left\{ (i\omega + \alpha V) \chi + V \frac{\partial \chi}{\partial x_p} \right\} e^{i\omega t + \alpha x_p} = \\ &= -V \left\{ \frac{i\omega}{V(1-M^2)} \chi + \frac{\partial \chi}{\partial x_p} \right\} \cdot e^{i\omega t + \alpha x_p} \end{aligned} \quad (7)$$

Op het draagvlak is

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial x_p} \right)_{y=0} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{2\lambda}{\beta} \int_0^{x_p} J_1\{2\lambda(x-x_p)\} \cdot \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_{y=0} dx \quad (8)$$

Uit symmetrisoverwegingen volgt, dat de drukverdeling aan de onderzijde gelijk is aan die aan de bovenzijde.

De totale druksprong is dus

$$\frac{p_{\text{bov}} - p_{\text{ond}}}{\rho \omega} = 2V e^{i\omega t + \alpha x_p} \cdot \left\{ \frac{i\omega}{V(M^2-1)} \int_0^{x_p} J_0\{2\lambda(x-x_p)\} e^{-\alpha x} w(x) dx + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{2\alpha(M^2-1)} \int_0^{x_p} J_1\{2\lambda(x-x_p)\} e^{-\alpha x} w(x) dx + e^{-\alpha x_p} \cdot \frac{w(x_p)}{V(M^2-1)} \right\} \quad (9)$$

Hieruit kunnen de kracht en het moment om de oorsprong door integratie berekend worden, die wel in de meeste gevallen numeriek uitgevoerd zal moeten worden.

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 30 Nov. 1950

De toepassing van Laplace-transformatie  
in mathematisch-fysische problemen.

door

H.A. Lauwerier.

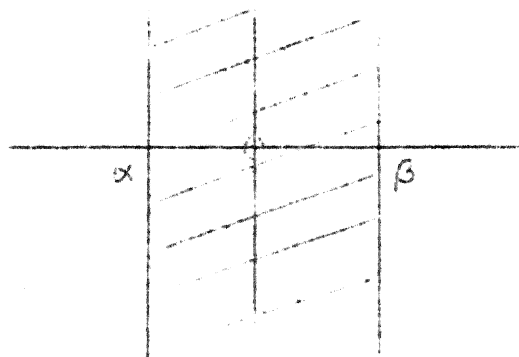
§ 1. In de mathematisch fysica ontmoet men veelal differentiaal- en integraalvergelijkingen, welke met de gewone methoden tot vaak gecompliceerde onoverzichtelijke berekeningen leiden of waar zelfs een behoorlijke oplossingsmethode ontbreekt. Tenminste, zolang men de methode van de Laplace-transformatie niet kent, want deze stelt ons in staat bepaalde typen problemen kort en elegant op te lossen of aanmerkelijk te vereenvoudigen. Moeilijkheden die zich voordoen wanneer men op de gewone wijze een bekende functie naar de bij het probleem behorende eigenfuncties wil ontwikkelen, verdwijnen bij voorbeeld als bij toverslag. Hieronder zullen we in het kort de principes van deze methode uiteenzetten, waarna enkele aan de praktijk ontleende voorbeelden behandeld zullen worden, die de voordelen van deze methode duidelijk demonsteren.

§ 2. Onder de Laplace-transform (beter maar langer: Laplace-getransformeerde) van een functie  $F(t)$  verstaan we de functie  $f(s)$  gedefinieerd door

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1)$$

$F(t)$  is een in principe voor alle reële waarden van  $t$  gedefinieerde functie, die voor  $t \rightarrow +\infty$  aan bepaalde eisen zal hebben te voldoen.

$f(s)$  wordt door (1) als een in een zeker gebied van het complexe vlak gedefinieerde functie bepaald; men kan eenvoudig aantonen dat dit gebied steeds een strook is begrensd door twee verticale rechten (zie fig. 1).



Elk van deze rechten kan naar het oneindige verschoven zijn. Kies b.v.  $F(t) = e^{-t}$ . In deze strook blijkt  $f(s)$  ook een analytische functie te zijn, hetgeen c.a. betekent, dat we onbeperkt naar  $s$  kunnen differentiëren.

In het volgende stelt  $U(t)$  de zogenaamde eenheidsfunctie (unit function) voor, gedefinieerd als volgt

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Heel vaak zullen we functies  $F(t)$  beschouwen, die voor  $t < 0$  niet gedefinieerd of onbekend zijn. In dat geval nemen we de Laplace-transformatie van  $U(t)F(t)$ , hetgeen dus betekent, dat we (1) dienen te vervangen door

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (3)$$

In het bijzonder spreken we bij (3) van een enkelvoudige of eenzijdige Laplace-transformatie, bij (1) van een tweezijdige Laplace-transformatie. Het convergentiegebied voor de eenzijdige Laplace-transformatie strekt zich rechts naar het oneindige uit.

Voorlopig zullen we ons tot de enkelvoudige Laplace-transformatie beperken, aangezien deze in de praktijk het meeste voorkomt.

Het verband tussen het origineel  $F(t)$  en het beeld  $f(s)$  duiden we vaak symbolisch a.v. aan

$$\mathcal{L}F = f \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}f = F \quad ; \quad F(t) \doteq f(s) .$$

§3. De  $\mathcal{L}$ -transformatie wordt veel toegepast bij

a) Inschakelingsproblemen in de electrotechniek.

De bijbehorende differentiaalvergelijking is gewoon en lineair b.v.

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + c y = g(t)$$

De toestand voor  $t = 0$  is gegeven.

b) Diffusie en warmtegeleiding.

De bijbehorende differentiaalvergelijking is bijvoorbeeld voor een radiaal-symmetrisch systeem a.v.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = k \frac{\partial T}{\partial t}$$

dus weer lineair. De beginsituatie is weer gegeven, bovendien zijn randvoorwaarden voor  $r$  voorgeschreven.

De methode van de  $\mathcal{L}$ -transformatie is feitelijk de mathematische reactie op de door Heaviside, een electrotechnicus, ontwikkelde rekenwijze, die niets anders bleek te zijn dan een formele onstrenge toepassing van de  $\mathcal{L}$ -methode in de vorm van operatorenrekening.

§ 4. Om een gegeven probleem in de  $\mathcal{L}$ -taal te kunnen brengen en om de getransformeerde oplossing te kunnen terugvertalen, bedienen we ons van een  $\mathcal{L}$ -woordenboek in de vorm van een tabel met de  $\mathcal{L}$ -transforms van een aantal gegeven functies. De hierbij in acht te nemen grammatica zullen we hieronder in 't kort uiteenzetten.

$$\mathcal{L}\{a F + b G\} = a \mathcal{L} F + b \mathcal{L} G \quad (4)$$

De  $\mathcal{L}$ -transformatie is homogeen en lineair.

$$\begin{aligned} \text{Indien} \quad & F(t) \doteq f(s) \\ \text{geldt} \quad & e^{at} F(t) \doteq f(s-a) \end{aligned} \quad (5)$$

$$F(at) \doteq \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (6)$$

$$U(t-a)F(t-a) \doteq e^{-as} f(s) \quad \text{mits } a \geq 0. \quad (7)$$

$$\frac{dF}{dt} \doteq s f(s) - F(0) \quad (8a)$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} \doteq s^2 f(s) - s F(0) - F'(0) \quad (8b)$$

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{s} f(s) \quad (9)$$

$$t F(t) \doteq -\frac{df}{ds} \quad (10)$$

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \doteq f_1(s) \cdot f_2(s) \quad (11)$$

De bovenstaande formules kunnen gemakkelijk geverifieerd worden. Enige speciale aandacht verdient de laatste betrekking (11). De in het linkerlid voorkomende integraal heet de convolutie van  $F_1(t)$  en  $F_2(t)$  en is feitelijk het continue analogen van de uitdrukking voor de  $n$ -de term van een reeks verkregen door twee reeksen te vermenigvuldigen n.l.

$$\sum_0^\infty a_n \cdot \sum_0^\infty b_n = \sum_0^\infty c_n \quad \text{met}$$

$$c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}.$$

### § 5. Enige veel voorkomende $\mathcal{L}$ -transforms.

$$\frac{1}{s} \doteq t \quad R(s) > 0$$

$$\frac{1}{s-a} \doteq e^{at} \quad R(s) > a$$

$$\frac{e^{-as}}{s} \doteq U(t-a) \quad R(s) > 0$$

$$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} \doteq t^k \quad R(s) > 0$$

$$\frac{\Gamma(k+1)}{(s-a)^{k+1}} \doteq t^k e^{at} \quad R(s) > a$$

$$\frac{s}{a^2+s^2} \doteq \cos at \quad R(s) > 0$$

$$\frac{a}{a^2+s^2} \doteq \sin at \quad R(s) > 0$$

$$\frac{-\gamma - \ln s}{s} \doteq \ln t \quad R(s) > 0$$

Enige interessanter maar moeilijker te bewijzen  $\mathcal{L}$ -paren zijn

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \doteq J_0(at) \quad R(s) > 0$$

$$\frac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}} \doteq J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) U(t-b) \quad R(s) > 0$$

$$K_0(as) \doteq \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}} U(t-a) \quad R(s) > 0$$

waarbij  $J_0$  en  $K_0$  Besselfuncties van de eerste en tweede soort voorstellen.

### § 6. De algemene omkeerstelling.

Aan de algemene  $\mathcal{L}$ -transformatie

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \quad \alpha < R(s) < \beta$$

beantwoordt de volgende omkeerstelling

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad \alpha < \gamma < \beta$$

waarbij de integratielweg een verticale rechte in de convergentiestrook is.

Het bewijs dat we hieronder schetsmatig zullen aangeven berust op de volgende stelling, waarop ook de Fourier-transformatie, waarvan de Laplace-transformatie feitelijk een variant is, berust:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{\sin Mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \{ \varphi(+0) + \varphi(-0) \}$$

Beschouw de volgende integraal

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iM}^{\gamma+iM} e^{st} ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} F(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{+M} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\gamma+iu)(t-\tau)} F(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{+M} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\gamma+iu)v} F(t-v) dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma v} F(t-v) dv \int_{-M}^{+M} e^{iuv} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma v} F(t-v) \frac{\sin Mv}{v} dv \rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} e^{\gamma v} F(t-v) = F(t) \end{aligned}$$

waarmede het bewijs geleverd is.

De voorwaarden, die vervuld moeten zijn, opdat een en ander geoorloofd zij komen hierop neer, dat  $F(t)$  zich in het algemeen behoorlijk - bij gedeelten continu of monotoon - gedraagt en voor  $t = \pm \infty$  de convergentie van de integraal voor zekere  $s$  waarden mogelijk maakt.

Toepassingen van de Laplace-transformatie II  
door  
Dr H.A. Lauwerier.

A. Gewone differentiaalvergelijkingen.

We beschouwen een voorbeeld uit de electriciteitsleer. Op een circuit bestaande uit een in serie geschakelde zelfinductie L, weerstand R en capaciteit C, wordt wisselspanning  $E \sin \omega t$  aangelegd. De aanvankelijke lading Q en stroom I zijn nul en op zeker tijdstip  $t=0$  wordt de wisselspanning ingeschakeld.

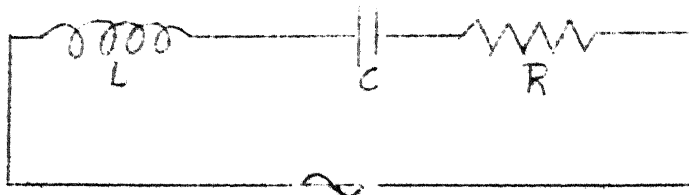


fig.1

Gevraagd wordt I als functie van de tijd.

De differentiaalvergelijking is

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E \sin \omega t \quad (1)$$

met  $\frac{dQ}{dt} = I$

en  $t=0 \quad Q=0 \quad I=0.$

Indien  $\bar{I}$  de Laplace transform van I voorstelt vinden we voor  $\bar{I}$

$$\bar{I} = \frac{Es \omega}{(Ls^2 + Rs + 1/C)(s^2 + \omega^2)} \quad (2)$$

De uitdrukking (2) kunnen we eenvoudig in de volgende vorm brengen

$$I = \frac{E}{Z^2} \left\{ \frac{X(s+\mu)}{(s+\mu)^2 + n^2} - \frac{\mu X'}{s^2 + \omega^2} - \frac{Xs - R/\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (3)$$

waarbij  $\mu = \frac{R}{2L}$ ,  $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ ,

$$X = L\omega - 1/C\omega,$$

$$X' = L\omega + 1/C\omega,$$

$$Z^2 = X^2 + R^2.$$

Verondersteld wordt  $n^2 > 0$ .

Terugtransformatie van (3) geeft direct

$$I = \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \gamma) - \frac{E}{nZ(LC)^{1/2}} e^{-\mu t} \sin(nt - \delta) \quad (4)$$

waarbij  $\text{tg } \gamma = X/R$

$\text{tg } \delta = nX/\mu X'.$

Voor grote  $t$  waarden mag de tweede term in het rechterlid van (4) verwaarloosd worden en houden we de "stationnaire oplossing"

$$I = \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \gamma)$$

over.

Indien op  $t=0$  een willekeurige spanning  $V=f(t)$  wordt ingeschakeld verloopt de oplossing als volgt.

$$\bar{I} = \frac{s}{L \{ (s+\mu)^2 + n^2 \}} \cdot \bar{f}(s) \quad (6)$$

Het origineel van  $\frac{s}{L \{ (s+\mu)^2 + n^2 \}}$  is gelijk aan

$$\frac{e^{-\mu t} (n \cos nt - \mu \sin nt)}{nL}$$

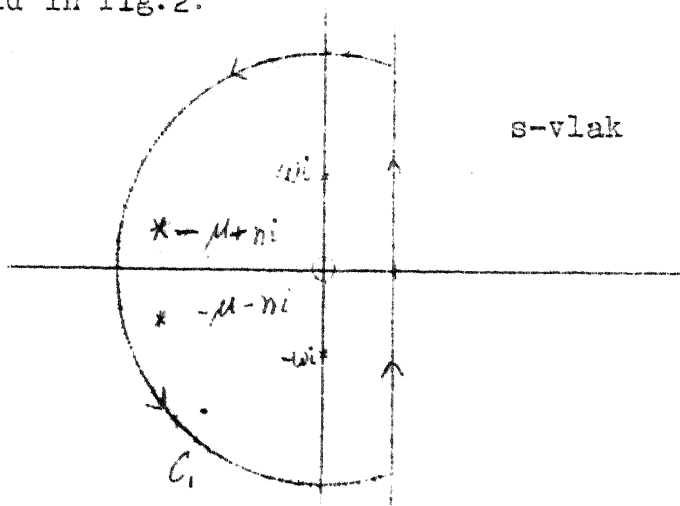
zodat volgens de productstelling het origineel van (6) gegeven wordt

$$\text{door} \quad I = \frac{1}{nL} \int_0^t e^{-\mu \tau} (n \cos n\tau - \mu \sin n\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (7)$$

De resultaten (4) en (5) kunnen ook gemakkelijk gevonden worden met behulp van de algemene omkeerstelling:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} \frac{E s \omega}{L \{ (s+\mu)^2 + n^2 \} (s^2 + \omega^2)} ds \quad (8)$$

De integratieweg is een verticaal in het  $s$ -vlak rechts van de imaginair-as. De contour kunnen we vervormen tot een van het type  $C$ , als voorgesteld in fig. 2.



Aangezien de integrand in (8) analytisch is, is  $I$  gelijk aan de som van de residuen van de in  $C$  liggende polen  $\pm \omega i$ ,  $\pm (-\mu + ni)$ .

Voor de "stationnaire" oplossing hebben we slechts te maken met de meest rechts gelegen polen, dus



$$I_{\text{stat.}} = \frac{E\omega}{L} \left[ \text{Res}_{s=\pm\omega i} \frac{se^{st}}{\{(s+\mu)^2+n^2\}(s^2+\omega^2)} \right] = \frac{E}{L} \sin(t)$$

waarmee (5) is teruggevonden.

Analoog kunnen we de volledige oplossing (4) vinden.

### B. Partiele Differentiaalvergelijkingen.

Het volgende voorbeeld is ontleend aan de theorie van de warmtegeleiding. Beschouw een cirkelvormige cylinder met begintemperatuur  $T=0$ . Gevraagd wordt het temperatuurverloop, wanneer de cylindervand op temperatuur  $V$  gehouden wordt.

De differentiaalvergelijking is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq r < a \quad t > 0, \quad (9)$$

met  $t=0 \quad T=0$   
 $r=a \quad T=V$ .

Zij  $T^*$  de  $s$ -transform van  $T$ , dan is

$$\frac{d^2 T^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT^*}{dr} - \frac{s}{k} T^* = 0 \quad (10)$$

en  $r=a \quad T^* = \frac{V}{s}$ .

De algemene oplossing van (10) is

$$T^* = A I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{k}} \right) + B K_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{k}} \right)$$

Aangezien voor  $r=0$  geen singulariteit mag optreden is  $B=0$ ,

$$\text{zodat} \quad T^* = \frac{V I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{k}} \right)}{s I_0 \left( a \sqrt{\frac{s}{k}} \right)} \quad (11)$$

Het origineel van (11) vinden we met behulp van de algemene omkeersformule.

$$T = \frac{V}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{k}} \right)}{s I_0 \left( a \sqrt{\frac{s}{k}} \right)} ds \quad (12)$$

De contour  $C$  kan naar links omgelegd worden en omsluit dan de polen van de integrand.

$$s=0 \quad \text{en} \quad s=-k\alpha_n^2$$

waarbij  $\alpha_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) de nulpunten van  $I_0(xa)$  zijn.

Toepassing van de residustelling geeft dus

$$T = \text{Res}(s=0) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(s=-k\alpha_n^2)$$

$$\text{of } T = V - \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)} \quad (13)$$

De reeks (13) is zeer bruikbaar voor grote  $t$  waarden, maar faalt voor kleine  $t$ .

Om een ontwikkeling voor kleine  $t$  te vinden handelen we als volgt.

Stel in (12)  $s \rightarrow \frac{V}{t}$ . We vinden

$$T = \frac{V}{2\pi i} \int_C \frac{e^v I_0(r\sqrt{\frac{V}{kt}})}{v I_1(a\sqrt{\frac{V}{kt}})} dv$$

en nu passen we de asymptotische ontwikkelingen van de Besselfuncties toe:

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \frac{1}{8z} \dots\right)$$

$$I_1(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{3}{8z} \dots\right)$$

Dit komt er dus op neer, dat we het beeld (11) vervangen door een ander beeld dat met (11) voor grote  $s$ -waarden praktisch overeenstemt, en dat we van dit nieuwe beeld het origineel gaan zoeken.

Ontwikkeling van (11) geeft

$$T^* \approx \frac{Va^{1/2}}{sr^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{a-r}{8ar\sqrt{s/k}} + \frac{9a^2-7r^2-2ar}{128a^2r^2\frac{s}{k}} \dots \right\} e^{-a-r\sqrt{\frac{s}{k}}}$$

Het origineel vinden we uit een tabel:

$$T = \frac{Va^{1/2}}{r^{1/2}} \operatorname{erfc} \frac{a-r}{2\sqrt{kt}} + \frac{V(a-r)(kta)^{1/2}}{4ar^{1/2}} \operatorname{ierfc} \frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \dots (14)$$

bruikbaar voor kleine  $t$  mits evenwel  $\frac{r}{a}$  niet klein is.

Voor de temperatuur in het midden  $r=0$  volgen we een andere weg.

Uit 
$$T^*(r=0) = \frac{V}{s I_0(a\sqrt{\frac{s}{k}})}$$

volgt nu 
$$T^* \sim \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{k^{1/4} s^{3/4}} e^{-a\sqrt{\frac{s}{k}}} - \frac{V(2\pi)^{1/2} k^{1/4}}{8s^{5/4} a^{1/2}} e^{-a\sqrt{\frac{s}{k}}} \dots$$

Uit de tabel volgt voor de eerste term

$$T(r=0) \sim \frac{Va}{\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{a^2}{4kt}} K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{8kt}\right) \quad (15)$$

De in (14) optredende errorfuncties worden a.v. gedefinieerd

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\operatorname{ierfc} x = \int_x^{\infty} \operatorname{erfc} \xi d\xi$$

Het volgende voorbeeld is eveneens ontleend aan de theorie van de warmtegeleiding. Een vlakke cirkelvormige plaat, aan de rand geïsoleerd, bezit op  $t=0$  een zekere temperatuurverdeling  $T=\varphi(r)$ . Gevraagd wordt hoe de temperatuur met de tijd verandert.

De corresponderende vergelijking is

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (16)$$

met de nevenvoorwaarden

$$\begin{cases} t = 0 & T = \varphi(r) \\ r = R & \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ r = 0 & T \text{ eindig} \end{cases} \quad (17)$$

Stellen we  $T = T^*$  en  $\alpha^2 = -\frac{s}{k}$ ,  $\varphi(r) = -\frac{\varphi(r)}{k}$

dan gaan (16) en (17) door  $\mathcal{L}$ -transformatie over in

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT^*}{dr} + \alpha^2 T^* &= \varphi(r) \\ r=0 & T^* \text{ eindig} \\ r=R & \frac{dT^*}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

dus een gewone differentiaalvergelijking.

We stellen nu  $T^* = \int_0^r G_1(r, \rho) \varphi(\rho) d\rho + \int_r^R G_2(r, \rho) \varphi(\rho) d\rho$  (19)

$$\text{waarbij} \quad \begin{cases} G_1(r, \rho) = AJ_0(\alpha r) + BY_0(\alpha r) & \rho < r < R \\ G_2(r, \rho) = CJ_0(\alpha r) + DY_0(\alpha r) & 0 < r < \rho \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{en} \quad \begin{cases} G_1(r, r-0) - G_2(r, r+0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} G_1(r, r-0) - \frac{\partial}{\partial r} G_2(r, r+0) = 1 \end{cases} \quad (21)$$

De constanten A, B, C, D vinden we uit (21) en uit de randvoorwaarden van (18):

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ AJ_1(\alpha R) + BY_1(\alpha R) &= 0 \\ AJ_0(\alpha \rho) + BY_0(\alpha \rho) &= CJ_0(\alpha \rho) \\ AJ_1(\alpha \rho) + BY_1(\alpha \rho) - CJ_1(\alpha \rho) &= -1/\alpha \end{aligned}$$

Aldus vinden we voor  $G(r, \rho)$

$$\begin{cases} G_1 = -\frac{\pi \rho}{2} J_0(\alpha \rho) \left\{ J_0(\alpha r) Y_1(\alpha R) - J_1(\alpha R) Y_0(\alpha r) \right\} / J_1(\alpha R) \\ G_2 = -\frac{\pi \rho}{2} J_0(\alpha \rho) \left\{ J_0(\alpha \rho) Y_1(\alpha R) - J_1(\alpha R) Y_0(\alpha \rho) \right\} / J_1(\alpha R) \end{cases} \quad (22)$$

De oplossing van (16) en (17) kan dus met (12) in de volgende vorm worden gebracht

$$T = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} ds \int_0^R G(r, \rho) \psi(\rho) d\rho \quad (23)$$

Een nadere beschouwing van (22) leert dat  $G_1$  en  $G_2$  analytische functies van  $s$  zijn; logarithmische bijdragen in de teller afkomstig van de  $Y$ 's blijken nl. te verdwijnen. De polen worden eenvoudig gevonden uit

$$J_1(\alpha R) = 0$$

$$\text{of} \quad s = s_n = -k \frac{k_n^2}{R^2}$$

waarbij  $k_n$  het  $n^e$  nulpunt van  $J_1(k)$  voorstelt ( $k_0=0$ ).

De integraal (23) kan naar de residuen van deze polen, welke allen op de negatief reële as liggen, ontwikkeld worden.

$$\text{Het residu van } s=0 \text{ is } \frac{r}{R^2} \int_0^R \psi(\rho) d\rho$$

Het residu van  $s=s_n$  is

$$\frac{2}{R^2} e^{-k \frac{k_n^2 t}{R^2}} \frac{J_0\left(\frac{r}{R} k_n\right)}{J_0'(k_n)} \int_0^R \frac{J_1(k \rho)}{J_0'(k_n)} \psi(\rho) d\rho$$

zodat we uiteindelijk vinden

$$T = \frac{2}{R^2} \left\{ \int_0^R e^{sf}(\rho) d\rho + \sum_n e^{-k \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{J_0'(R \alpha_n)} \int_0^R e^{sf}(\rho) \frac{J_1(\rho \alpha_n)}{J_0'(\alpha_n)} d\rho \right\} \quad (24)$$

met  $J_1(\alpha_n R) = 0$ .

Voor  $t \rightarrow \infty$  vinden we de uniforme temperatuur

$$T = \frac{2}{R^2} \int_0^R e^{sf}(\rho) d\rho \quad (25)$$

Dit is juist de gemiddelde temperatuur op  $t=0$ . Aangezien i.v.m. de isolerende wand geen warmteoverdracht naar buiten plaats vindt moet de totale warmtehoeveelheid constant blijven of m.a.w. de gemiddelde temperatuur is voor alle  $t$  waarden gegeven door (25). Anderszijds blijkt dit weer mathematisch wanneer we  $\frac{2}{R^2} \int_0^R r f dr$  naar  $t$  differentiëren.

Het voordeel van deze methode is, dat eigenfuncties en eigenwaarden automatisch voor de dag komen en dat we van alle zorgen over de al of niet compleetheid van het stelsel eigenfuncties bevrijd zijn. Dit is vooral van belang wanneer in ingewikkelder problemen de oorsprong een pool van hogere orde is.

Toepassing van de tweezijdige Laplace  
transformatie

Dr H.A.Lauwerier

§1. De tweezijdige Laplace transformatie van de functie  $h(t)$  wordt gedefinieerd a.v.

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} h(t) dt \quad (1)$$

Hierdoor wordt een complexe functie  $f(s)$  voorgesteld welke in een zekere strook van het  $s$ -vlak

$$\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$$

betekenis heeft. Buiten deze strook divergeert de integraalvoorstelling (1). Doorgaans blijkt  $f(s)$  echter een in het gehele  $s$ -vlak voortzetsbare analytische functie te zijn.

Men heeft dus voor elke  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} e^{-(\alpha+\delta)t} |h(t)| &\rightarrow 0 & t \rightarrow +\infty \\ e^{-(\beta-\delta)t} |h(t)| &\rightarrow 0 & t \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

De omkering van (1) is

$$\left\{ \begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} f(s) ds \\ \alpha &< \sigma < \beta \end{aligned} \right. \quad (2)$$

De rekenregels zijn eenvoudiger dan bij de eenzijdige Laplace transformatie.

Als  $f(s) \doteq h(t)$

heeft men

$$f(s-a) \doteq e^{at} h(t)$$

$$e^{as} f(s) \doteq h(t+a)$$

$$f\left(\frac{s}{a}\right) \doteq ah(t \cdot a)$$

$$s^n f(s) \doteq \frac{d^n}{dt^n} h(t)$$

$$\frac{d^n}{ds^n} f(s) \doteq (-1)^n t^n h(t)$$

$$\frac{f(s)}{s} \doteq \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$\int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma \doteq \frac{h(t)}{t}$$

$$f_1(s) f_2(s) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau$$

Eenvoudige voorbeelden zijn

$$\frac{1}{s} \doteq U(t)$$

$$\sqrt{\pi} e^{\frac{s^2}{4}} \doteq e^{-t^2}$$

$$\frac{e^{-as}}{s} \doteq U(t-a)$$

$$\frac{\text{Ch } as}{s} \doteq \frac{1}{2} \{U(t-a) + U(t+a)\}$$

$$K_0(a\sqrt{b^2-s^2}) \doteq \frac{e^{-b\sqrt{t^2+a^2}}}{2\sqrt{t^2+a^2}}$$

De tweezijdige  $\mathcal{L}$ -transformatie is algemener dan de eenzijdige. B.v. hebben de laatste twee  $s$ -functies geen origineel voor de eenzijdige  $\mathcal{L}$ -transformatie.

Is nml.  $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$

dan is voor  $s \rightarrow \infty$  zeker  $f(s) \rightarrow 0$ , en hieraan is niet voldaan.

Voor de algemene theorie van de tweezijdige  $\mathcal{L}$ -transformatie verwijzen we naar het pas verschenen boek van B.v.d.Pol en H.Bremmer (Operational Calculus, Cambridge)

## §2. Toepassingen.

Beschouw een oneindig lange buis waarin met een constante snelheid  $V$  een vloeistofmengsel stroomt. Op het begintijdstip hebben we een kleurloze en een gekleurde vloeistof naast elkaar. Noemen we de concentratie van de kleurstof  $c$ , is  $z$  de lengtecoördinaat en  $t$  de tijd, dan beantwoordthieraan de differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - V \frac{\partial c}{\partial z} \\ t=0 \quad c = U(z) \end{cases} \quad (3)$$

Stellen we  $\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sz} c dz$

(dus  $\mathcal{L}$ -transformatie naar de lengte coördinaat)

dan is

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = (\beta s^2 - Vs)\varphi \\ t=0 \quad \varphi = \frac{1}{s} \end{cases}$$

Dus

$$\varphi = \frac{1}{s} e^{(\beta s^2 - Vs)t} = \frac{1}{s} e^{\beta t(s - \frac{V}{2\beta})^2 - \frac{V^2 t}{4\beta}}$$

Uit de regelsjes volgt

$$e^{s^2} \doteq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t}{4\beta}}$$

$$e^{\beta t s^2} \doteq \frac{1}{2\sqrt{\beta \pi t}} e^{-\frac{z^2}{4\beta t}}$$

$$e^{\beta t (s - \frac{v}{2\beta})^2} \doteq \frac{1}{2\sqrt{\beta \pi t}} e^{\frac{vz}{2\beta} - \frac{z^2}{4\beta t}}$$

dus

$$e^{(\beta s^2 - vs)t} \doteq \frac{1}{2\sqrt{\pi \beta t}} e^{-\frac{(z - vt)^2}{4\beta t}}$$

Hieruit volgt onmiddellijk

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\pi \beta t}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{(\xi - vt)^2}{4\beta t}\right\} d\xi$$

of

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z - vt}{2\sqrt{\beta t}}} e^{-\xi^2} d\xi \quad (4)$$

Inderdaad is (4) de juiste oplossing wegens

$$z \rightarrow +\infty \quad c = 1$$

$$z \rightarrow -\infty \quad c = 0$$

Het belangrijke voordeel van de  $\mathcal{L}$ -transformatie is hier, dat de discontinuïteit in de beginvoorwaarde  $t = 0 \quad c = U(z)$  verdwijnt.

Het volgende voorbeeld is iets ingewikkelder.

Bij het onderzoek naar de verbranding in een cilindrische reactor, te vergelijken met een Salamanderkacheltje, trad de volgende differentiaalvergelijking op

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v \frac{\partial T}{\partial z} + e^{t-z} U(z-t) \\ t = 0 \quad T = 0 \\ z = \pm \infty \quad T = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Hierbij treedt een discontinuïteit op in de differentiaalvergelijking. Hier geeft weer de  $\mathcal{L}$ -transformatie uitkomst.

Stel nml.

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sz} T dz$$

Daardoor gaat (5) over in:

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\beta s^2 - vs)\varphi + \int_t^\infty e^{-sz + t - z} dz$$

of

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} - (\beta s^2 - vs)\varphi = \frac{e^{-st}}{s+1} \\ t = 0 \quad \varphi = 0 \end{cases}$$

dus aanzienlijk eenvoudiger.

De oplossing is

$$\varphi = \frac{e^{(\beta s^2 - \gamma s)} - e^{-st}}{s(s+1)(\beta s - \gamma + 1)} \quad (6)$$

Het origineel van (6) vinden we door eerst partieelbreuksplitsing toe te passen en de verkregen brokstukken van het type

$$\frac{e^{(\beta s^2 - \gamma s)t}}{s + \gamma} \quad \text{en} \quad \frac{e^{-st}}{s + \gamma}$$

apart terug te transformeren en samen te voegen.

Aldus is

$$\frac{e^{\alpha_1(s+\gamma)^2 + \alpha_2}}{s + \gamma} = \frac{1}{2} e^{-\gamma(t+\alpha_2)} \operatorname{erfc}\left(-\frac{t+\alpha_2}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)$$

en

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\frac{e^{-st}}{s + \gamma} = e^{\gamma(t-z)} U(z-t)$$

De verdere uitwerking laten we aan de lezer over.

Het derde en laatste probleem is het volgende: Een vloeistof stroomt met constante snelheid door een buis gevuld met grofkorrelig materiaal. De invloed hiervan wordt met een diffusie-term beschreven. Ergens op de as wordt met een klein buisje kleurstof geïnjecteerd. Men vraagt de verspreiding hiervan in de buis wanneer een stationnaire toestand is bereikt.

De differentiaalvergelijking is

$$D_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + D_a \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = v \frac{\partial c}{\partial z} \quad (7)$$

met  $z = -\infty \quad c = 0$

$$r = R \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0$$

$c$  is de concentratie van de kleurstof in massa/vol.

Stroomt er in de oorsprong 0 uit het buisje  $q$  massa/tijd van de kleurstof in de grote buis, dan is in de omgeving van 0:

$$c = \frac{q}{4\pi\sqrt{D_r}\{D_r z^2 + D_a r^2\}^{1/2}} + \dots$$

Invoering van nieuwe dimensie oze coördinaten vereenvoudigt (7) iets.

Gemakshalve gebruiken we dezelfde notatie:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 2K \frac{\partial c}{\partial z} \\ r=1 \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \\ z=-\infty \quad c=0 \\ r^2+z^2 \rightarrow 0 \quad c \sim \frac{Q}{\sqrt{r^2+z^2}} \end{cases} \quad (7a)$$



Stel weer  $\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sz} c dz$

De vergelijking gaat over in

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \gamma \varphi = 0$$

met  $\gamma = 2\kappa s - s^2$

De oplossing kunnen we schrijven a.v.

$$\varphi = A I_0(\gamma r) + B K_0(\gamma r)$$

Slechts  $K_0$  is verantwoordelijk voor de singulariteit in 0.

Nu is  $K_0(\gamma r) \doteq \frac{e^{-K(-z + \sqrt{r^2 + z^2})}}{2\sqrt{r^2 + z^2}}$

Dus  $B = 2Q$

Uit de randvoorwaarde voor  $r = 1$  volgt tenslotte A en we vinden

$$\varphi = \frac{2Q}{I_0(\gamma)} \left\{ I_0(\gamma r) K_0(\gamma) + I_0(\gamma) K_0(\gamma r) \right\} \quad (8)$$

Opmerking

$$c = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + z^2}} \exp -K(-z + \sqrt{r^2 + z^2})$$

is blijkbaar de oplossing behorende bij een "oneindig dikke buis"

Terugtransformatie van (8) geschiedt met de complexe omkeerformule. Leggen we de integratieweg naar links om dan is  $\varphi$  gelijk aan de som van de residuen behorende bij de polen op de negatieve as en de oorsprong. De oplossing is dan geldig voor  $z > 0$ .

Leggen we de integratieweg naar rechts om, dan is  $\varphi$  gelijk aan de som van de residuen van de positieve polen. De oplossing geldt dan voor  $z < 0$ .

Aldus volgt

$$\begin{cases} c = 2Q \sum_0^{\infty} \frac{J_0(k_n r) e^{-z\{-K + \sqrt{K^2 + k_n^2}\}}}{J_0^2(k_n) \sqrt{K^2 + k_n^2}} & z \geq 0 \\ c = 2Q \sum_0^{\infty} \frac{J_0(k_n r) e^{+z\{K + \sqrt{K^2 + k_n^2}\}}}{J_0(k_n) \sqrt{K^2 + k_n^2}} & z \leq 0 \end{cases}$$

$$J_1(k_n) = 0 \quad n \geq 0$$

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 23 November 1950

's GRAVENHAGE

Mathematische behandeling van stroming door  
poreuze media.

door

R. Timman.

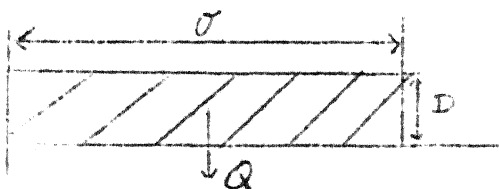
1. Inleiding, de wet van Darcy

De stroming door poreuze media vormt een bijzonder hoofdstuk uit de algemene theorie van stromingsverschijnselen. De algemene bewegingsvergelijkingen voor de stroming van een viskeuze vloeistof worden opgeleverd door de vergelijkingen van Navier-Stokes en de continuïteitsvergelijking en in wezen is het probleem dus een randwaarde probleem voor deze gecompliceerde vergelijkingen waarbij de randcondities gegeven zijn op een oppervlak van zeer grillige vorm, n.l. de begrenzing van de poriën in het medium.

Het spreekt vanzelf, dat een dergelijke opzet van het probleem onoverkomelijke moeilijkheden levert. Anderzijds is het ook in het geheel niet nodig om de stroming door die poriën te beschrijven daar ons alleen het makroscopische stromingsbeeld interesseert. Zuiver theoretisch te werk gaande, zou men dus kunnen proberen uit de vergelijkingen van Navier-Stokes door de vorming van gemiddelden een makroscopische bewegingswet af te leiden.

Het schijnt, dat, theoretisch een dergelijk procédé nog niet op bevredigende wijze is geschied.

In plaats hiervan wordt in de theorie opgebouwd op de wet van Darcy, die gebaseerd is op het experiment en het eenvoudige resultaat geeft, dat de hoeveelheid water  $Q$ , die per tijdseenheid door een zandfilter stroomt evenredig is met het oppervlak  $O$  en het verschil in potentiële energie



tussen de vloeistof aan boven en onderkant  $\Delta p$  en omgekeerd evenredig met de dikte  $D$  van het bed, of

$$Q = \frac{c \cdot O \cdot \Delta p}{D}$$

Hier is  $c$  een materiaalconstante voor het zand.

Het blijkt nu, dat deze wet geldigheid bezit, zolang de vloeistofstroming door de poriën laminair is en dit is het geval, zo lang het getal van Reynolds  $R = d \cdot v \cdot \frac{\rho}{\mu}$

klein is. Hierin is  $d$  een karakteristieke lengte van de poriën,  $v$  de stromingssnelheid en  $\frac{\rho}{\mu} = \nu$  de kinematische viscositeit van de vloeistof.

(Dit is volkomen analoog van de stroming door een buis, waar  $d$  de diameter van de buis voorstelt.

Voor  $R_p < 2000$  is de stroming door de buis laminair en wordt beschreven door de wet van Poisseuille, maar voor  $R > 2000$  verandert dit karakter plotseling om over te gaan in de turbulente stromingsvorm, die door geheel andere wetten wordt beheerst).

In het geval van stroming door een poreus medium is deze overgang niet zo plotseling, hetgeen duidelijk wordt, als men bedenkt, dat de stroming hier een gemiddelde is van de stroming door een groot aantal kanalen en dus voor een bepaalde snelheid in het ene kanaal de stroming al turbulent is en in het andere nog niet. Er is hier dus een betrekkelijk groot overgangsgebied, dat begint bij een getal van Reynolds  $R \sim 1$  waarbij  $d$  de gemiddelde korrel diameter is. Het blijkt niet goed mogelijk te zijn om een scherp geldigheidsgebied voor de wet aan te geven, maar volgens Muskat is de kritieke waarde  $R \sim 1$  aan de veilige kant.

In problemen, zoals ze in de praktijk voorkomen, is aan de conditie vrijwel altijd voldaan, behalve misschien in een zeer directe omgeving van een put.

Om de differentiaalvorm van de bewegingsvergelijkingen op te schrijven, beschouwen we volumelementen, die weliswaar makroscopisch gezien, klein zijn, maar die toch groot zijn t.o.v. de diameters van de poriën.

Dan wordt de wet

$$\frac{\partial}{\partial t} = v = \text{const.} \cdot \frac{db}{dx}$$

waarbij de constante hier de dimensie

$$\frac{\tau \cdot \tau^{-1}}{M \cdot L^{-1} \cdot \tau^{-2} \cdot L^{-1}} = \frac{L^3}{M \cdot \tau^{-1}} = \frac{L^2}{\frac{M}{\tau} \cdot L^2 \cdot \tau^{-1}}$$

heeft. De constante hangt samen met de vloeistof en de vaste stof en wel met de viscositeit van de vloeistof en de porositeit van de vaste stof. Het ligt dus voor de hand te stellen

$$v = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx}$$

waarin  $\mu$  de viscositeit van de vloeistof is.  $k$  is een constante, die alleen op de vaste stof betrekking heeft en de dimensie  $L^2$  heeft.

Indien wij alleen waterstromingen beschouwen is  $\mu$  steeds hetzelfde. Bovendien drukken we dan  $p$  uit in meters (waterhoogte) zodat we kunnen schrijven

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{k\gamma g}{\mu} \frac{dh}{dx} = \bar{k} \cdot \frac{dh}{dx}$$

waarbij  $\gamma$  = dichtheid van het water.

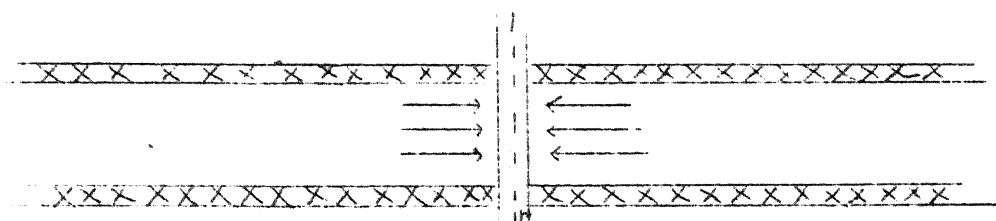
In dit geval zal  $\bar{k}$  de dimensie van een snelheid hebben.

## 2. Eindimensionale problemen.

We behandelen eerst een klasse van problemen, waarbij de optredende grootheden slechts afhangen van één enkele coördinaat. Hierbij kunnen we onderscheid maken tussen vlakke problemen en radiaal symmetrische problemen.

### a) Vlakke problemen.

Het eenvoudigste probleem is het probleem van een put tussen twee parallelle horizontale wanden. Daar wij alleen vlakke stroming beschouwen, is de put hier een oneindige sleuf, waardoor per strekkende meter een constante hoeveelheid vloeistof wordt verwijderd.



De vergelijkingen worden nu geleverd door de wet van Darcy

(1)

$$v = -k \cdot \frac{dp}{dx}$$

samen met de continuïteitsvergelijking, die eenvoudig luidt

(2)

$$\frac{dv}{dx} = 0.$$

zodat

$$v = \text{const} = v.$$

als  $v$  gegeven is door de sterkte van de put.

In dit eerst voorbeeld zijn beide lagen ondoorlaatbaar geromen.

Beschouw nu echter eens het geval, dat de bovenste laag doorlaatbaar is, terwijl er een constante potentiaal  $\varphi$  heerst. (In dit geval zijn druk en potentiaal identiek, daar de zwaartekracht geen rol speelt).

Door de bovenste laag vindt een stroming plaats, die beschreven wordt door de formule

(3)

$$Q = C (\varphi_0 - \varphi)$$

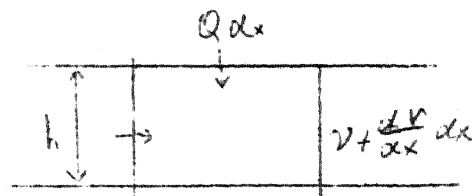
waarin  $Q$  de hoeveelheid vloeistof voorstelt, die per tijdseenheid per m. lengte door de laag gaat en  $\varphi_0$  en  $\varphi$  de potentiaal boven de bovenste laag en tussen de twee lagen voorstellen

De stroming tussen de twee lagen wordt beschreven door de wet van Darcy

$$v = -k \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

In totaal hebben we dus de beschikking over verg. (1) en (3) en de continuïteitsvergelijking, die nu de vorm heeft:

$$Q - h \frac{dv}{dx} = 0. \quad (4)$$



De vergelijking voor de potentiaal wordt dan

$$c(\varphi_0 - \varphi) + (kh) \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \quad (5)$$

en de randvoorwaarde wordt

$$x = 0 \text{ (rand van de put)} \quad v = v_0$$

Hierbij is de verticale snelheid van het door de laag stromende water verwaarloosd.

Verg. (5) wordt opgelost door als nieuwe variabele in te voeren

$$\varphi - \varphi_0 = \psi \quad (6)$$

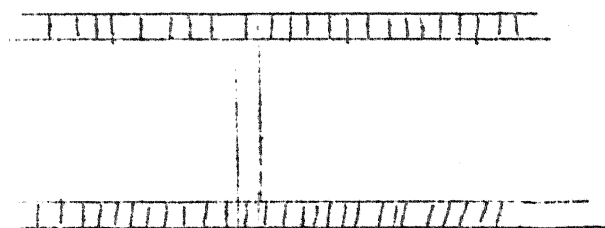
zodat zij overgaat in

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{c}{kh} \psi = 0. \quad (7)$$

met de algemene oplossingen.

$$\psi = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$$

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{c}{kh}}$$



De eerste oplossing wordt uitgesloten door een tweede randvoorwaarde n.l. , dat in het oneindige de snelheid nul moet worden (in elk geval eindig moet blijven).

Dan is

$$\varphi = \varphi - \varphi_0 = B e^{-\lambda x}$$

en de snelheid wordt

$$v = k \frac{d\varphi}{dx} = -\lambda B k e^{-\lambda x},$$

zodat de voorwaarde

$$x = 0, v = v_0 \text{ levert}$$

$$B = - \frac{v_0}{\lambda k}$$

en de oplossing wordt

$$v = v_0 e^{-\lambda x}$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{v_0}{\lambda k} e^{-\lambda x}.$$

b) Radiaal symmetrische problemen.

Wij beschouwen hier de analoog van de boven behandelde problemen voor de vlakke stroming voor radiaal symmetrische stroming.

b 1.) Bron tussen twee ondoorlaatbare waarden.

De vergelijking van Darcy is

$$v = +k \frac{d\varphi}{dr} \quad (1)$$

De continuïteits vergelijking wordt opgeleverd door de eis, dat door iedere cirkel een constante hoeveelheid water stroomt

$$2\pi v r = Q, \quad (2)$$

als  $Q$  de sterkte van de bron is.

Wij kunnen de wet ook in differentiaalvorm schrijven

$$2\pi v r = 2\pi (v + dv)(r + dr).$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v}{r} \quad (3)$$

Met (2) en (1) volgt direct

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi k} \ln r + \text{const.} \quad (4)$$

waarbij de constante wordt bepaald uit de voorwaarde, dat voor  $r = a$ ,

$$\varphi = \varphi_0 \text{ is.}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{Q}{2\pi k} \ln \frac{r}{a} \quad (5)$$

b 2.) Bronstroming tussen twee lagen, waarvan de bovenste doorlaatbaar is en de onderste ondoorlaatbaar.

Boven de bovenste laag heerst een constante potentiaal.

Wij maken weer de onderstelling, die strict genomen, niet juist is, dat de stroming tussen de twee lagen steeds horizontaal gericht is, zodat het water, dat door de bovenste laag siepelt, direct de snelheid krijgt, die het water tussen de

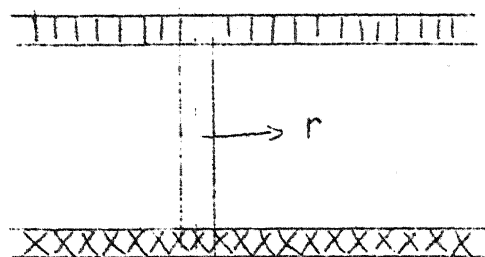
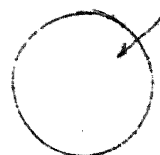
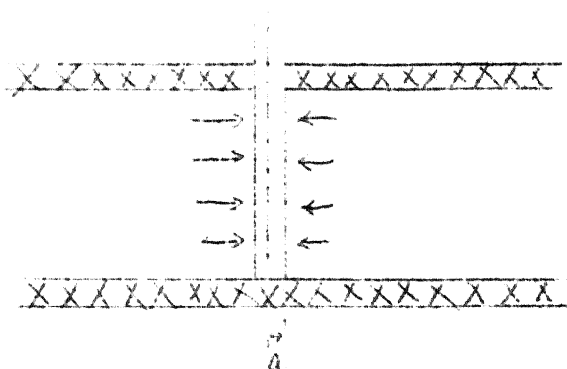
lagen heeft. Noem de potentiaal boven de bovenste laag  $\varphi_0$  en tussen de lagen  $\varphi$ , dan wordt de stroming door de bovenste laag beheerst door de vergelijking

$$Q = c (\varphi_0 - \varphi). \quad (1)$$

Tussen de twee lagen wordt de stroming gegeven door de wet van Darcy

$$v = -k \frac{d\varphi}{dr} \quad (2)$$

en de continuïteitsvergelijking



$$r \, 2\pi v + Q \, 2\pi r \, dr = 2\pi (r + dr)(v + dv).$$

$$r \frac{dv}{dr} + v = rQ \quad (3)$$

Eliminatie van  $Q$  en  $v$  uit (1), en (3)

levert

$$kr \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + k \frac{d\varphi}{dr} = -rc(\varphi_0 - \varphi).$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{c}{k} (\varphi - \varphi_0) = 0. \quad (4)$$

voeren wij in de functie

$$\varphi - \varphi_0 = \psi, \quad (5)$$

dan wordt de vergelijking

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{c}{k} \psi = 0 \quad (6)$$

Deze vergelijking wordt nog gereduceerd door te stellen

Zij gaat dan over in  $\sqrt{\frac{c}{k}} \cdot r = \rho$

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \psi = 0 \quad (7)$$

Deze vergelijking is verwant met de vergelijking van Bessel, die wij nu verder gaan behandelen.

### 3. Eigenschappen van de functies van Bessel.

De algemene vorm van de differentiaalvergelijking van Bessel is

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + (1 - \frac{v^2}{r^2}) \psi = 0, \quad (1)$$

waarin  $v$  een constante is.

Wij zoeken nu een oplossing van deze differentiaalvergelijking in de vorm van een reeks

$$\psi = r^\alpha (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_k r^k + \dots) \quad (2)$$

en vinden voor de  $a$ 's een stel vergelijkingen door coëfficiënten van opeenvolgende machten van  $r$  nul te stellen.

$$a_0 \cdot \alpha(\alpha-1) + a_0 \alpha - v^2 a_0 = 0 \quad r^{\alpha-2}$$

$$a_1 \{(\alpha+1)\alpha + a_1(\alpha+1)\} = 0 \quad r^{\alpha-1}$$

$$a_2 \{(\alpha+2)(\alpha+1) + a_2(\alpha+2) + a_0 - v^2 a_2\} = 0 \quad r^\alpha$$

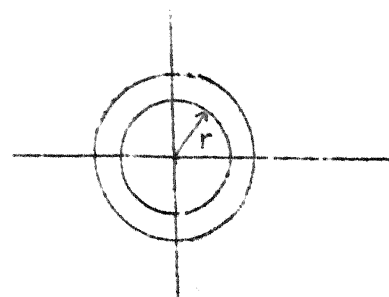
$$a_k \{(\alpha+k)(\alpha+k-1) + (\alpha+k) - v^2\} + a_{k-2} = 0 \quad r^{\alpha+k-2}$$

De coëfficiënt  $a_0$  is alleen dan  $\neq 0$ , indien

$$\alpha^2 - v^2 = 0,$$

dus

$$\alpha = +v, \text{ of } \alpha = -v$$



Verder is  $a_1 = 0$ . (als  $\nu \neq 1$ )  $a_2 = \frac{-a_0}{(\alpha+1)^2 - \nu^2} = \frac{-a_0}{2^2(\nu+1)}$

en voor  $\alpha = +\nu$

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{(\alpha+k)^2 - \nu^2} = \frac{-a_{k-2}}{k(2\nu+k)}$$

De oneven termen vallen weg en de even termen blijven over  $k = 2m$ .

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2m \cdot 2(\nu+m)} = \dots = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (\nu+m)(\nu+m-1) \dots (\nu+1)}$$

De oplossing is dus:

$$\psi = a_0 \cdot r^\nu \left\{ 1 - \frac{r^2}{2^2(\nu+1)} + \frac{r^4}{2^4(\nu+1)(\nu+2)} - \dots + \frac{(-1)^m \left(\frac{r}{2}\right)^{2m}}{m! (\nu+1) \dots (\nu+m)} \right\} \quad (3)$$

De functie

$$J_\nu(r) = \frac{r^\nu}{\nu!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{r}{2}\right)^{2m}}{m! (\nu+1) \dots (\nu+m)} \quad (4)$$

wordt de functie van Bessel van de orde  $\nu$  genoemd.

Naast  $J_\nu$  ontstaat een tweede oplossing, door  $\alpha = -\nu$  te stellen. Haar reeks wordt verkregen door in (4)  $\nu$  door  $-\nu$  te vervangen.

Indien  $\nu$  geen geheel getal is, zijn op deze manier twee verschillende oplossingen verkregen. Zij zijn ook geen veelvoud van elkaar.

Als  $\nu$  echter wel een geheel getal is, gaat het procédé niet meer op, daar in de formule voor  $J_{-\nu}$  ( $\nu = n$ )

$$J_{-n}(r) = r^{-n} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{r}{2}\right)^{2m}}{m! (-n+1) \dots (-n+m)}$$

Vanaf  $m = n$  de noemers alle nul worden en de reeks dus niet bestaat. Om te zien wat er nu gebeurt, gaan we terug naar de recursie formules:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1-n)}$$

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2^2 \cdot m(-n+m)} \text{ of wel } -a_{2m-2} = a_{2m} 2^2 m(-n+m).$$

Als we nu  $a_{2n} \neq 0$  kiezen, zien we, dat alle lagere  $a$ 's nul worden zodat de reeks begint met de term met  $a_{2n}$

Verder is

$$a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{2^2(n+1) \cdot 1}$$

$$a_{2n+2l} = \frac{-a_{2n+2l-2}}{2^2(n+l)(-n+n+l)} = \frac{-a_{2n+2l-2}}{2^2 l(n+l)} = \frac{(-1)^l a_{2n}}{2^2 l(n+l)}$$

Bij substitutie blijkt de reeks te worden

$$a_{2n} \cdot r^n \cdot \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} - \dots + \frac{(-1)^m \left(\frac{r}{2}\right)^{2m}}{m! (n+1) \dots (n+m)} \right\}, \quad (5)$$

d.w.z. de reeks wordt identiek met de reeks voor  $J_n$  en de tweede oplossing valt samen met de eerste (op een constante factor na). Om nu een tweede oplossing te krijgen, die niet samenvalt met de eerste, stellen we

$$y = u \cdot J_n(r)$$

en substitueeren dit in de vergelijking



Dan wordt

$$\frac{dy}{dr} = J_n(r) \frac{du}{dr} + u \frac{dJ_n(r)}{dr}$$

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = J_n \frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \frac{dJ_n}{dr} \frac{du}{dr} + u \frac{d^2 J_n}{dr^2}$$

en de vergelijking voor u wordt

$$J_n \frac{d^2 u}{dr^2} + \left( 2 \frac{dJ_n}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{du}{dr} = 0.$$

Noem  $\frac{du}{dr} = p$ ; dan moet p voldoen aan

$$\frac{dp}{dr} + \left( 2 \frac{dJ_n}{dr} + \frac{1}{r} \right) p = 0$$

Of wel

$$\frac{d \ln p}{dr} = - \frac{d}{dr} \ln \{ r \cdot J_n^2 \}$$

zodat

$$p = \frac{C}{r \{ J_n(r) \}^2}$$

en

$$u = C \left\{ \frac{dr}{r \{ J_n(r) \}^2} + C_2 \right\}$$

Daar  $J_n(r)$  in een machtreeks ontwikkeld is, kunnen wij de integrand ook in een machtreeks ontwikkelen. Zij begint met een term met  $r^{-2n-1}$  en klimt op.

Onder de termen is er dus één van de gedaante  $r^{-1}$  die na integratie oplevert  $\ln r$ .

Wij vinden dus, dat

$$u = \ln r + R(r)$$

waarbij  $R(r)$  een machtreeks is, die begint met  $r^{-2n}$

Dan is de nevenoplossing

$$J = J_n(r) \cdot \ln r + f(r)$$

waarbij  $f(r)$  het product is van  $J_n(r)$  met  $R(r)$  en dus begint met een term  $r^{-n}$

De coëfficiënten van de reeks voor  $f(r)$  kunnen weer bepaald worden door te substitueren in de differentiaalvergelijking.

Een ingewikkelde berekening levert dan, dat voor de tweede oplossing gekozen kan worden

$$\begin{aligned} \gamma_n(x) = & \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(n-\nu-1)!}{\nu!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2\nu} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+k} \right) \right] \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k} \end{aligned}$$

Deze tweede functie wordt de functie van Neumann genoemd. De constante

$\gamma$  is de constante van Euler,  $\ln \gamma = C = 0,577215$  -----

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{\ell} - \ln m \right).$$

Mathematische theorie van de stroming door  
poreuze media.

4. Eigenschappen van de functies van Bessel voor grote waarden van r.

Uit de vergelijking

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} + \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right) \varphi = 0$$

is het mij lastig om direct het gedrag voor grote r af te leiden, omdat we niet weten hoe groot de term met  $\frac{du}{dr}$  is t.o.v. de andere.

Verdrijf daarom eerst deze term door te stellen

$$\varphi = u(r) \cdot v(r)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = u'v + uv'$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$vu'' + 2u'v' + uv'' + \frac{1}{r}(u'v + uv') + \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right)uv = 0$$

Stel de coëfficiënt van  $u' = 0$

$$2v' + \frac{1}{r}v = 0$$

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{2r} \quad \ln v = \ln r^{-\frac{1}{2}} + C_1$$

$$v = Cr^{-\frac{1}{2}}, \quad v' = -\frac{1}{2}Cr^{-\frac{3}{2}}, \quad v'' = \frac{3}{4}Cr^{-\frac{5}{2}}$$

Stel dus

$$\varphi = Cr^{-\frac{1}{2}} \cdot u$$

dan moet u voldoen aan

$$C \cdot r^{-\frac{1}{2}} u'' + \frac{3}{4} C \cdot r^{-\frac{5}{2}} u = \frac{1}{r} u \cdot \frac{1}{2} C r^{-\frac{3}{2}} + \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right) C r^{-\frac{1}{2}} = 0$$

of wel

$$u'' + \left(1 - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right) u = 0$$

Voor grote r kunnen we in eerste benadering de term  $\frac{v^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$  verwaarlozen en krijgen dan

$$u'' + u = 0$$

met de oplossingen

$$u = e^{\pm ir}$$

Stel nu

$$u = e^{ir} \left\{ 1 + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \dots + \frac{b_n}{r^n} \right\}$$

dan kunnen we weer  $b_1, b_2, \dots$  vinden door substitutie.

$$u' = i e^{ir} \left\{ 1 + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \dots + \frac{b_n}{r^n} \right\} - e^{ir} \left\{ \frac{b_1}{r^2} + \frac{2b_2}{r^3} + \frac{3b_3}{r^4} + \dots + \frac{n b_n}{r^{n+1}} \right\}$$

$$u'' = -e^{ir} \left\{ 1 + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \dots + \frac{b_n}{r^n} \right\} - 2i e^{ir} \left\{ \frac{b_1}{r^2} + \frac{2b_2}{r^3} + \dots + \frac{n b_n}{r^{n+1}} \right\} + e^{ir} \left\{ \frac{2b_1}{r^3} + \frac{6b_2}{r^4} + \dots + \frac{n(n+1)b_n}{r^{n+2}} \right\}$$

zodat substitutie levert

$$r^0 \quad 0 = 0$$

$$r^{-1} \quad 0 = 0$$

$$r^{-2} \quad -2ib_1 - \left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$r^{-3} \quad -2i \cdot 2b_2 + 2b_1 - \left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right)b_1 = 0. \quad -2i \cdot 2b_2 = \left(\gamma - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)b_1$$

$$r^{-n} \quad -2i(n-1)b_{n-1} + (n-2)(n-1)b_{n-2} - \left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right)b_{n-2} = 0$$

$$+ 2i(n-1)b_{n-1} = \left\{ n^2 - 3n + 2 - \gamma^2 + \frac{1}{4} \right\} b_{n-2}$$

$$b_{n-1} = b_{n-2} \frac{(n - \frac{3}{2})^2 - \gamma^2}{2i(n-1)}$$

$$b_2 = b_1 \frac{9/4 - \gamma^2}{4i}$$

$$b_n = b_{n-1} \frac{(n - \frac{1}{2})^2 - \gamma^2}{2in} = b_{n-2} \frac{\{(n - \frac{1}{2})^2 - \gamma^2\} \{(n - \frac{3}{2})^2 - \gamma^2\}}{(2i)^2 n(n-1)} =$$

$$= b_{n-3} \frac{\{(n - \frac{1}{2})^2 - \gamma^2\} \{(n - \frac{3}{2})^2 - \gamma^2\} \{(n - \frac{5}{2})^2 - \gamma^2\}}{(2i)^3 n(n-1)(n-2)} = \dots = b_1 \frac{\{(n - \frac{1}{2})^2 - \gamma^2\} \{(n - \frac{3}{2})^2 - \gamma^2\} \dots \{(\frac{1}{2})^2 - \gamma^2\}}{(2i)^n n!}$$

$$u = e^{ir} \left\{ 1 + \frac{\gamma^2 - 1/4}{2i} \frac{1}{r} - \frac{(\gamma^2 - 1/4)(\gamma^2 - 9/4)}{2 \cdot 2} \frac{1}{(2r)^2} - \dots \right\}$$

De andere oplossing vinden wij door  $i$  door  $-i$  te vervangen.

De samenhang van deze reeksen, die alleen bruikbaar zijn voor grote waarden van  $r$  (eigenlijk zijn ze divergent) en daarom asymptotische reeksen genoemd worden, met de vroeger gevonden uitdrukkingen is op een directe wijze zeer moeilijk uit te vinden.

Wij slaan daarom een andere weg in en proberen een uitdrukking voor de oplossingen van de vergelijking te vinden, die voor kleine waarden van  $r$  de ene reeks en voor grote waarden van  $r$  de andere reeks zal opleveren.

# 5. Integraalvoorstellingen voor de functies van Bessel.

De gezochte uitdrukking wordt geleverd door een integraal te substitueren. Wegens het karakter van een  $e$  macht, proberen we (Laplace)

$$\varphi = \int_{z_1}^{z_2} e^{irz} f(z) dz$$

en zoeken nu  $z_1$  en  $z_2$  benevens  $f(z)$  zo te bepalen, dat aan de vergelijking wordt voldaan.

$$\frac{d\varphi}{dr} = i \int_{z_1}^{z_2} e^{irz} z f(z) dz$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \int_{z_1}^{z_2} e^{irz} z^2 f(z) dz.$$

Voor de volgende herleidingen beperken wij ons tot de functies van de orde nul ( $\nu = 0$ ), die voor de te beschouwen problemen vrijwel steeds voldoende leveren.

Dan moet

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{irz} \left[ z^2 f(z) - \frac{i}{r} z f'(z) - f(z) \right] dz = 0$$

Wij gaan nu de integrand herleiden door partiele integratie

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{irz} (z^2 - 1) f(z) dz = \frac{1}{ir} \int_{z_1}^{z_2} (z^2 - 1) f(z) d e^{irz} = \frac{1}{ir} \left[ (z^2 - 1) f(z) \right]_{z_1}^{z_2} - \frac{1}{ir} \int_{z_1}^{z_2} e^{irz} \frac{d}{dz} \{ (z^2 - 1) f(z) \} dz$$

Dus moet

$$\frac{i}{r} \int_{z_1}^{z_2} e^{irz} \left[ z f(z) - \frac{d}{dz} \{ (z^2 - 1) f(z) \} \right] dz + \frac{1}{ir} \left[ e^{irz} (z^2 - 1) f(z) \right]_{z_1}^{z_2} = 0$$

Hieraan kan voldaan worden, indien  $f(z)$  zodanig is gekozen, dat

$$z f(z) - \frac{d}{dz} \{ (z^2 - 1) f(z) \} = 0$$

of wel

$$z f(z) + (z^2 - 1) f'(z) = 0$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{z}{z^2 - 1} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(z^2 - 1)$$

$$f(z) = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Verder moeten  $z_1$  en  $z_2$  zo gekozen worden, dat de geïntegreerde termen wegvallen, bijv. door te kiezen  $z_1 = +1$ ,  $z_2 = -1$ .

Dit levert de integraaluitdrukking

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{ix} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Stel hierin  $x = \cos \varphi$ , dan is

$$dx = -\sin \varphi d\varphi$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sin \varphi$$

en de uitdrukking wordt

$$\int_0^\pi e^{i \cos \varphi} d\varphi$$

De reeksontwikkeling verkrijgen we, door

$$e^{i \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (\cos \varphi)^n}{n!}$$

in te vullen en de integraal wordt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi$$

Bereken nu:

$$P_n = \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi$$

Dan is

$$\begin{aligned} P_n &= \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi = \int_0^\pi \cos^{n-1} \varphi d \sin \varphi = \left[ \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi \right]_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos^{n-2} \varphi d\varphi \\ &= (n-1) \int_0^\pi \cos^{n-2} \varphi d\varphi - (n-1) \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi = (n-1) P_{n-2} - (n-1) P_n \end{aligned}$$

dus

$$P_n = \frac{n-1}{n} P_{n-2}$$

$$P_0 = \int_0^\pi d\varphi$$

$$P_1 = \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = [\sin \varphi]_0^\pi = 0$$

Alle  $P$  met oneven index vallen weg en

$$P_{2m} = \frac{2m-1}{2m} P_{2m-2} = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)} P_{2m-4} = \dots = \pi \frac{(2m-1)(2m-3) \dots 3 \cdot 1}{2m(2m-2) \dots 4 \cdot 2}$$

zodat de reeks wordt

$$\begin{aligned} \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{(2m-1)(2m-3) \dots 3 \cdot 1}{2m(2m-2) \dots 4 \cdot 2} &= \\ = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2} &= \pi J_0(r) \end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat

$$J_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ir \cos \varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(r \cos \varphi) d\varphi,$$

daar

$$\int_0^\pi \sin(r \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(r \cos \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \sin(r \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(r \cos \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \sin(r \cos(\pi - \varphi)) d(\pi - \varphi) = 0$$

en

$$\int_0^\pi \cos(r \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(r \cos \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \cos(r \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(r \cos \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \cos(r \cos(\pi - \varphi)) d(\pi - \varphi) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(r \cos \varphi) d\varphi$$

Om het asymptotische gedrag te vinden voor grote  $r$  kunnen we ook van deze formule uitgaan.

Het is, vooral met het oog op het vervolg in de speciale functies, die optreden in de toepassingen op de stroming door poreuze media, beter om een andere integraal te beschouwen, die ook aan de vergelijking voldoet, n.l. de integraal

$$\int_0^\infty \frac{e^{irz} dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

Immers, als  $r$  complex is,  $r = r' + i r''$  zullen voor deze functie ook de geïntegreerde termen wegvallen, als  $r'' > 0$ .

Een asymptotische ontwikkeling wordt nu geleverd door te stellen

$$r(z-1) = t^2, \quad dz = \frac{2t dt}{r}, \quad z-1 = \frac{t^2}{r}, \quad z+1 = \frac{t^2}{r} + 2$$

zodat de integraal overgaat in

$$e^{ir} \int_0^\infty \frac{2e^{it^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2r}} = \frac{2e^{ir}}{\sqrt{2r}} \int_0^\infty \frac{e^{it^2} dt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{2r}}}$$

Ontwikkel nu de noemer volgens het binomium van Newton

$$\left(1 + \frac{t^2}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2r} + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{2!} \left(\frac{t^2}{2r}\right)^2 + \dots$$

Deze reeks convergeert echter alleen, zolang  $\left|\frac{t^2}{2r}\right| < 1$ .

Wij kunnen dus geen exacte formule verwachten, daar wij van  $t = 0$  tot  $t = \infty$  integreren, integendeel, de ontstane reeks divergeert en stelt de integraal asymptotisch voor grote  $r$  voor, d.w.z. het verschil tussen de integraal en een vast eindig aantal termen van de reeks nadert tot nul, als  $r$  groot wordt (zonder bewijs).

Dan krijgen we

$$\frac{2e^{ir}}{\sqrt{2r}} \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{it^2} dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r} \int_0^\infty e^{it^2} dt + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{2!} \cdot \frac{1}{(2r)^2} \int_0^\infty e^{it^2} dt + \dots \right\}$$

Nu is

$$Q_{2n} = \int_0^{\infty} e^{it^2} t^{2n} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} t^{2n-1} d e^{it^2} = \frac{1}{2i} \left[ t^{2n-1} e^{it^2} \right]_0^{\infty} - \frac{2n-1}{2i} \int_0^{\infty} e^{it^2} t^{2n-2} dt =$$

$$= -\frac{2n-1}{2i} Q_{2n-2} = + (n-\frac{1}{2}) i Q_{2n-2}$$

Dus

$$Q_{2n} = (n-\frac{1}{2}) i Q_{2n-2} = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) i^2 Q_{2n-4} = \dots = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \cdot i^n Q_0$$

waarbij  $Q_0$  een zekere constante is.

Substitutie levert dus juist de asymptotische uitdrukking, die we ook uit de differentiaalvergelijking gevonden hebben voor  $\nu = 0$

$$Q_0 \frac{2e^{ir}}{\sqrt{2r}} \cdot \left\{ 1 - \frac{n-\frac{1}{2}}{2} i \cdot \frac{1}{2r} \dots \right\}$$

De uitdrukking in een machtreeks kunnen we ook vinden, hoewel dit niet zo eenvoudig is. Immers door  $e^{irz}$  in een machtreeks te ontwikkelen, ontstaan divergente integralen.

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{irz} dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int_0^{\infty} e^{ircosh\theta} d\theta = \text{Re} + i \text{Im}$$

Wij merken eerst op, dat het reële en imaginaire stuk elk afzonderlijk aan de vergelijking moeten voldoen en berekenen nu het gedrag van deze functies voor kleine waarden van  $r$ .

Stel  $rz = t$ , dan is de integraal ( $dz = \frac{dt}{r}$ ,  $\sqrt{z^2-1} = \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}$ )

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{it} dt}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

Daar steeds  $t > r$  wordt de convergente reeks

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}} = \frac{1}{t} \left\{ 1 - \frac{r^2}{t^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{t} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{t^2} + \dots \right\}$$

verkregen en de integraal wordt

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{it} dt}{t} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{t^2} + \dots \right\}$$

Ons interesseren alleen de termen van de lagere orde, daar de oplossing door het gedrag in de oorsprong vast ligt, d.w.z. wij beschouwen alleen de integraal voor kleine  $r$

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{it} dt}{t} = \int_r^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + i \int_r^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

De tweede integraal is direct te bepalen, immers

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

en voor de eerste geldt

$$\int_r^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \int_r^\infty \cos t \, d \ln t = -\cos r \cdot \ln r + \int_r^\infty \ln t \sin t \, dt.$$

We zien dus, dat voor  $r \rightarrow 0$  het imaginaire deel tot een constante nadert en het reële deel logarithmisch oneindig wordt. Het is nu mogelijk om streng te bewijzen, dat

$$\int_1^\infty \frac{e^{iz}}{\sqrt{z^2-1}} dz = \frac{\pi}{2} i \left\{ J_0(r) + i Y_0(r) \right\}.$$

De hier genoemde combinatie staat bekend als de cylinderfunctie van Hankel van de eerste soort

$$H_0^{(1)}(r) = J_0(r) + i Y_0(r) = -\frac{2}{\pi} i \int_1^\infty \frac{e^{iz}}{\sqrt{z^2-1}} dz$$

terwijl

$$H_0^{(2)}(r) = J_0(r) - i Y_0(r) = \frac{2}{\pi} i \int_1^\infty \frac{e^{-iz}}{\sqrt{z^2-1}} dz$$

de functie van Hankel van de tweede soort wordt genoemd.



Mathematische theorie van de stroming door poreuze media.

6. De vergelijking van Bessel voor imaginair argument.

De vergelijking, die in het vroeger geformuleerde probleem optrad, was niet de vergelijking van Bessel zelf, maar zij ontstaat uit verg. (3.1) voor  $\gamma = 0$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \psi = 0$$

door te substitueren

$$r = i\rho$$

De verkregen vergelijking

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \psi = 0$$

heeft dus een oplossing

$$J_0(r) = J_0(i\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{i\rho}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2}$$

De functie  $J_0(i\rho)$  wordt meestal met  $I_0(\rho)$  aangeduid. Uit de reeksontwikkeling blijkt, dat  $I_0(\rho)$  reëel is. Voor de tweede oplossing van de vergelijking van Bessel hadden wij gekozen

$$Y_0(r) = \frac{2}{\pi} J_0\left(\frac{ir}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k!} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right] \left(\frac{r}{2}\right)^{2k},$$

die voor  $r = i\rho$  overgaat in

$$Y_0(i\rho) = \frac{2}{\pi} I_0(\rho) \left[\ln \frac{\rho}{2} + \ln i\right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}.$$

Daar

$$\ln i = \ln e^{\frac{1}{2}\pi i} = \frac{1}{2}\pi i$$

krijgen we dus, dat  $Y_0(i\rho)$  complex is en dat het imaginaire deel de waarde  $i I_0(\rho)$  heeft.

Hieruit volgt, dat een reële oplossing verkregen wordt door te nemen

$$Y_0(i\rho) - i J_0(i\rho) = -i \{ J_0(i\rho) + i Y_0(i\rho) \} = -i H_0^{(1)}(i\rho).$$

Meestal kiezen wij de functie

$$K_0(\rho) = \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(i\rho)$$

als reële standaardoplossing voor de vergelijking van Bessel met imaginair argument.

Zij heeft dus de reeksontwikkeling

$$K_0(\rho) = -I_0(\rho) \cdot \ln \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}.$$

Voor grote  $\rho$  wordt het asymptotisch gedrag gevonden uit de vroeger opgeschreven asymptotische ontwikkeling. Zij volgde uit de integraal

blz. 17

voorstelling van  $H_0^{(1)}(r)$

$$H_0^{(1)}(\rho) = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho z}}{\sqrt{z^2-1}} dz$$

dus

$$K_0(\rho) = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho z}}{\sqrt{z^2-1}} dz = e^{-\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \{1 + O(1/\rho)\},$$

terwijl verder

$$I_0(\rho) = \frac{e^\rho}{\sqrt{\rho}} \{1 + O(1/\rho)\}.$$

Wij hebben nu een oplossing van de vergelijking gevonden, die voor  $\rho \rightarrow 0$  naar nul toegaat, zodat wij het stromingsprobleem van § 2 kunnen behandelen.

De oplossing voor  $\psi$  is

$$\psi = A \cdot K_0(\rho)$$

en

$$\psi = \psi_0 + A K_0(\sqrt{\frac{g}{K}} \cdot r)$$

Voor kleine  $r$  gedraagt deze oplossing zich als

$$\psi = \psi_0 - A \{ \ln r + \dots \}$$

zodat de snelheid wordt

$$v = -K \frac{d\psi}{dr} \approx \frac{AK}{r}$$

en de bronsterkte  $P$  wordt gelijk aan

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} v r d\theta = 2\pi AK = P.$$

Hieruit volgt

$$A = \frac{P}{2\pi K}$$

zodat de oplossing van het probleem wordt

$$\psi = \psi_0 - \frac{P}{2K\pi} K_0(\sqrt{\frac{g}{K}} r).$$

Mathematische theorie van stroming door poreuze media.

Tweedimensionale verschijnselen.

A. Horizontale stroming tussen parallelle ondoorlaatbare wanden.

1. Algemene eigenschappen der stroming.

De radiaal symmetrische stroming is in het voorgaande reeds behandeld. Voeren wij rechthoekige coördinaten in, dan is, omdat de stroming in een horizontaal vlak plaats vindt, de potentiaal  $\Omega$  gegeven door

$$\Omega = p - p_0.$$

en de snelheidscomponenten  $u$  en  $v$  worden bepaald door de wet van Darcy.

$$u = -K \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$v = -K \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

Uit de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

volgt dan, dat

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0$$

zodat  $\Omega$  voldoet aan de vergelijking van Laplace en de gehele theorie van de tweedimensionale potentiaalsvergelijking direct toegepast kan worden.

Naast de potentiaal bestaat op grond van de continuïteitsvergelijking een stroomfunctie  $\psi$ , zodanig, dat

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Indien wij een stroomlijn definiëren als een lijn, waarbij in ieder punt de snelheidsvector raaklijn is, dan geldt langs zo'n lijn, dat

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

evenredig is met

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} u + \frac{\partial \psi}{\partial y} v = 0$$

zodat langs een stroomlijn  $\psi = \text{constant}$  is.

Verder staat in ieder punt de snelheidsvector loodrecht op de aequipotentiallijn  $\Omega = \text{constant}$ , want langs zo'n lijn is het lijnelement bepaald door

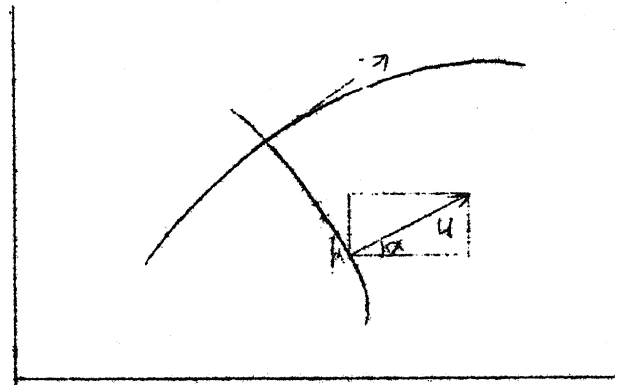
$$d\Omega = 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy \sim u dx + v dy,$$

dus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

Integreren wij vanaf een stroomlijn  $\psi = 0$  tot een stroomlijn  $\psi = \psi_0$  langs een aequipotentiaallijn, dan is de hoeveelheid doorgestroomde vloeistof gegeven door

$$\begin{aligned} \psi^* &= \int_0^x v_n ds = \int w ds = \\ &= \int \{w \cos \alpha ds \cdot \cos \alpha + w \sin \alpha ds \cdot \sin \alpha\} = \\ &= \int (u dy - v dx) = \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \\ &= \psi_0 - \psi_0 \end{aligned}$$



zodat de functie  $\psi$  de hoeveelheid vloeistof, die tussen een vaste stroomlijn, waar  $\psi = 0$  is en een variabele stroomlijn stroomt, meet.

Wij voeren verder een nieuwe potentiaal in

$$\varphi = -K\Omega$$

dan is

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Nu zijn de vergelijkingen tussen  $\varphi$  en  $\psi$  juist de vergelijkingen van Cauchy. Riemann voor het reële en imaginaire deel van een complexe functie  $\Phi$  van de variabele  $Z = x + iy$ .

$$\Phi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

dus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dz} \cdot i = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Gelijkstelling levert dan direct, als de tweede vergelijking met  $-i$  wordt vermenigvuldigd

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Verder volgt direct, dat

$$\frac{d\Phi}{dz} = u - iv$$

zodat dat de afgeleide van de complexe functie de toegevoegd complexe van de snelheid voorstelt (de gespiegelde vector t.o.v. de  $x$ -as).

## 2. Bijzondere stromingsvelden.

Met deze kennis kunnen wij nog enkele bijzondere gevallen beschouwen, in het bijzonder singuliere velden.

a) Bron in de oorsprong met sterkte  $Q$ . Voer in poolcoördinaten  $z = re^{i\vartheta}$

$$\Phi(z) = \frac{Q}{2\pi} \lg z = \frac{Q}{2\pi} \{ \lg r + i\vartheta \}$$

dus

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{Q}{2\pi} \lg r$$

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{Q}{2\pi} \vartheta$$

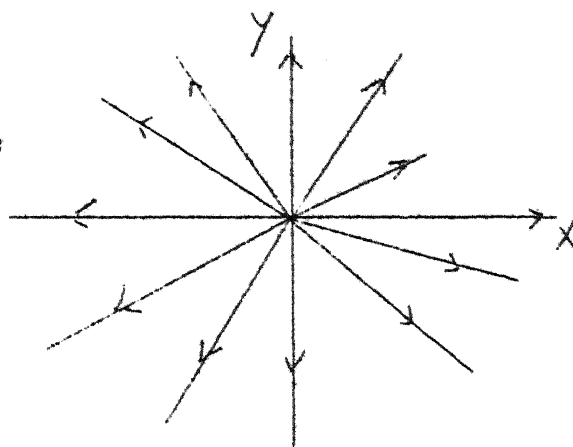
Hieruit blijkt ook direct de definitie van  $\psi$  als doorgestroomde hoeveelheid vloeistof.

De snelheid wordt nu gegeven door

$$u - iv = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\vartheta}$$

dus

$$u + iv = \frac{Q}{2\pi r} e^{i\vartheta}$$



De snelheid is dus overal radiaal gericht en omgekeerd evenredig met de afstand tot de bron.

b) Wervel in de oorsprong ter sterkte  $\Gamma$ .

De complexe potentiaal is

$$\Phi(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg z$$

Een wervel is dus een "imaginaire bron".

Nu is

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$$

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \lg r$$

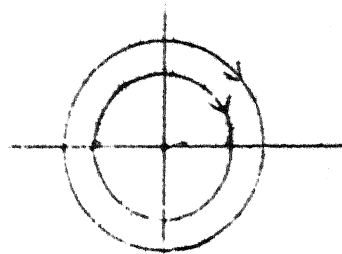
De snelheid is hier

$$u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = \frac{i\Gamma}{2\pi r} e^{-i\vartheta}$$

dus

$$u + iv = -\frac{i\Gamma}{2\pi r} e^{i\vartheta}$$

zodat de snelheid overal loodrecht staat op de radius. Indien  $\Gamma = Q$ , volgt het snelheidsveld van de wervel uit dat van de bron door in ieder punt de snelheid van de bronstroming  $\frac{1}{2}\pi$  te draaien.



Het is nu eenvoudig in te zien, dat de complexe potentiaal van een bron in het punt  $z_0$  is  $\Phi = \frac{Q}{2\pi} \lg(z - z_0)$  en van een wervel  $\bar{\Phi} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg(z - z_0)$

### c) Dipool.

Beschouw een bron en een put van gelijke sterkte, de eerste in het punt  $z_0 = \delta e^{i\alpha}$  de andere in het punt  $z_1 = -\bar{\delta} e^{i\alpha}$ .

Dan is de totale complexe potentiaal

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{Q}{2\pi} [\lg(z - \delta e^{i\alpha}) - \lg(z + \bar{\delta} e^{i\alpha})] = \frac{Q}{2\pi} \left[ \lg \frac{z - \bar{\delta} e^{i\alpha}}{z + \delta e^{i\alpha}} \right] = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \lg \frac{1 - \frac{\bar{\delta}}{z} e^{i\alpha}}{1 + \frac{\delta}{z} e^{i\alpha}} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \left[ -\frac{2\delta e^{i\alpha}}{z} + O\left(\frac{\delta^2}{z^2}\right) \right] \quad \text{voor } \left| \frac{\bar{\delta}}{z} \right| < 1\end{aligned}$$

Indien wij nu  $\delta$  naar nul laten gaan en tegelijkertijd  $Q$  zo laten aangroeien, dat het product  $2Q\delta = M$  constant blijft, dan is de complexe

potentiaal  $\Phi(z) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\alpha}}{z}$ , het veld van een dipool ter sterkte  $M$ .

De lijn  $z = re^{i\alpha}$ , waarop de bron en de put liggen, wordt de as van de dipool genoemd.

Neem in het bijzonder  $\alpha = \pi/2$ , dan is

$$\Phi(z) = -\frac{Mi}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{Mi}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

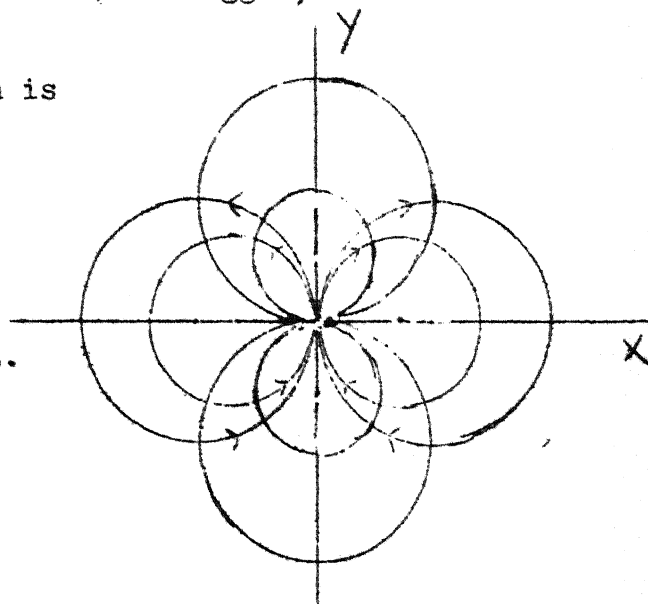
en de snelheid is gegeven door

$$u - iv = \frac{Mi}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2}$$

De lijnen  $\varphi = \text{const.}$  en  $\psi = \text{const.}$  hebben de vorm

$$\varphi(x, y) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

$$\psi(x, y) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = \text{const.}$$



d.w.z. zij vormen twee orthogonale cirkelbundels, die aan de  $x$ -as resp. de  $y$ -as raken.

Het dipoolveld met de  $y$ -as als as kan ook ontstaan uit het veld van twee evengrote, maar tegengestelde wervels, die elkaar langs de  $x$ -as naderen.

### 3. Conforme transformatie van stromingsvelden.

Beschouw in een  $Z = X + iY$  vlak een stroming met complexe potentiaal  $\Phi(Z) = \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y)$  en snelheid  $u - iv = \frac{d\Phi}{dz}$ . Indien nu een conforme transformatie wordt uitgevoerd  $z = f(Z)$ , waarbij  $Z = X + iY$  een punt in een ander vlak voorstelt, zal in overeenkomstige punten  $\Phi(z) = \Phi\{f(Z)\}$  dezelfde waarden aannemen, d.w.z. de stroomlijnen en equipotentiaallijnen in het ene vlak gaan over in de stroomlijnen en equipotentiaallijnen in het andere vlak.

De snelheid is in het  $Z$ -vlak gegeven door

$$u - iv = \frac{d\Phi\{f(Z)\}}{dZ} = \frac{d\Phi}{dz} f'(Z) = (u - iv) f'(Z)$$

zodat de snelheidsvector bij de transformatie gedraaid wordt over een hoek  $\arg f'(Z)$  en haar lengte vermenigvuldigd wordt met  $|f'(Z)|$ .

#### Eerste voorbeeld.

Bron tussen parallelle wanden.

Het veld wordt gevonden door de bron in  $Z = 0$  te spiegelen t.o.v. de wanden en deze spiegelingen te herhalen.

Zo ontstaat een periodiek snelheidsveld, waarbij de stroming tussen  $y = -h$  en  $y = +h$  periodiek herhaald wordt.

Door de afbeelding

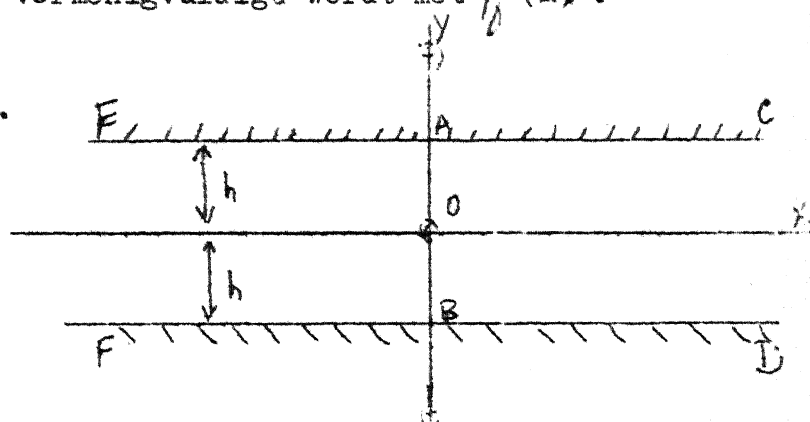
$$Z = \sinh \frac{\pi z}{2h}$$

wordt de strook in het  $z$  vlak afgebeeld op het  $Z$  vlak.

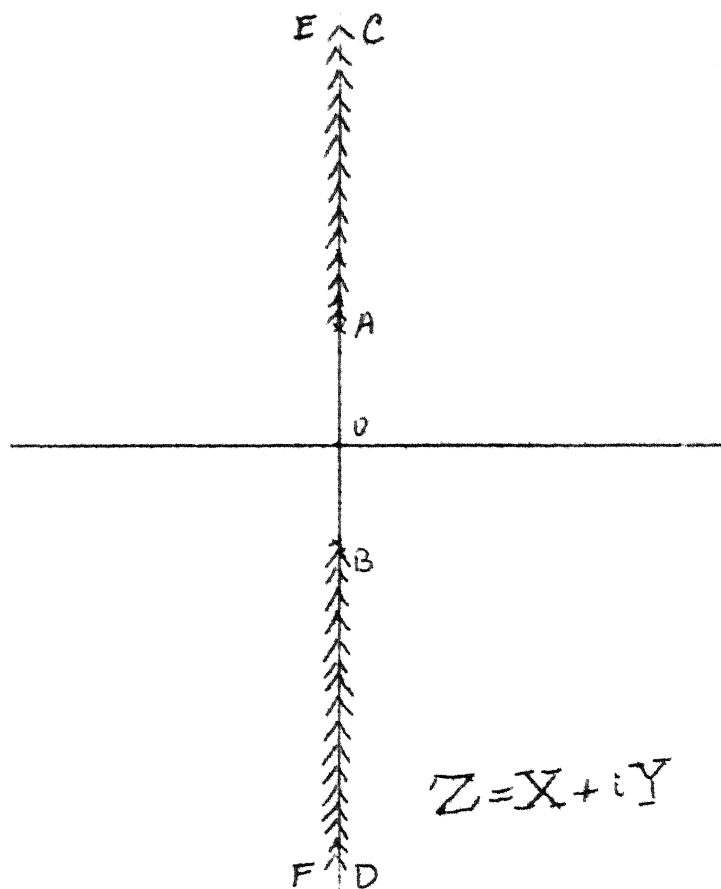
Immers de lijn  $Z = \pm ih + X$  gaat over in

$$Z = \sinh \frac{\pi}{2h} (X \pm ih) = \sinh \frac{\pi X}{2h} \cosh \frac{\pi i}{2} \pm \cosh \frac{\pi X}{2h} \sinh \frac{\pi i}{2} = \pm i \cosh \frac{\pi X}{2h}$$

Het verband is het beste te zien uit de volgende tabel.



	$Z = x + iy$	$Z = X + iY$
O	0,0	0,0
A	0+ih	0+i
B	0-ih	0-i
C	$+\infty + ih$	$0 + i\infty$
D	$+\infty - ih$	$0 - i\infty$
E	$-\infty + ih$	$0 + i\infty$
F	$-\infty - ih$	$0 - i\infty$



De voorwaarde, dat in het  $z$  vlak de stroming moet vallen langs de wanden gaat over in de voorwaarde, dat in het  $Z$  vlak de stroming langs de verticaal gericht moet zijn. Het veld van een bron in het  $Z$  vlak in de oorsprong voldoet juist aan deze eis, d.w.z. in het  $z$  vlak wordt de stroming opgeleverd door een bron in 0.

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln Z = \frac{Q}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{2h},$$

zodat de stroming in het  $z$ -vlak verkregen kan worden.

Het is duidelijk, dat de functie  $\ln \sin \frac{\pi z}{2h}$  singulariteiten heeft in de punten  $z = 2nh$  en dus inderdaad een reeks bronnen voorstelt.

De snelheid in het  $z$ -vlak wordt gegeven door

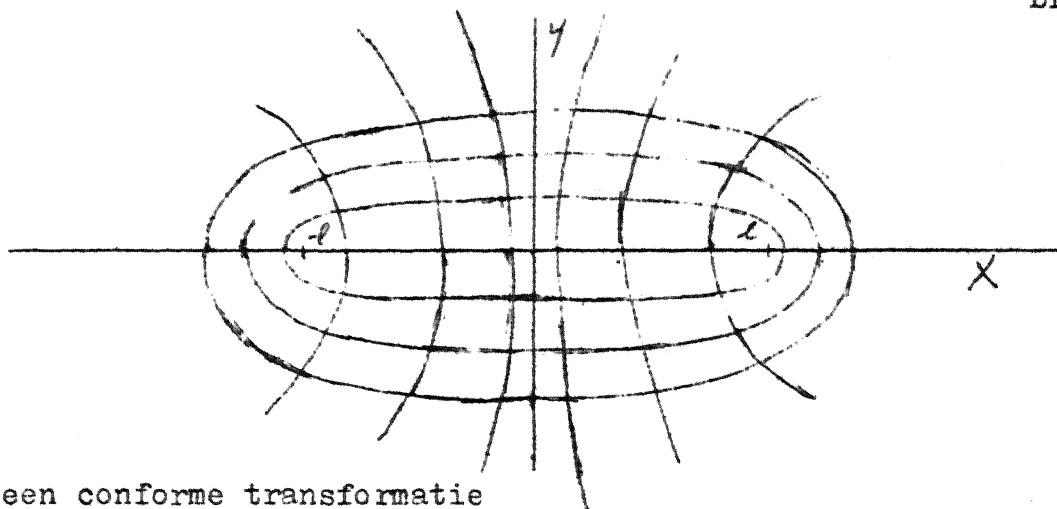
$$u - iv = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{h} \cdot \frac{\cos \frac{\pi z}{2h}}{\sin \frac{\pi z}{2h}} = \frac{Q}{4h} \cdot \cotg \frac{\pi z}{2h}$$

Aan de lezer wordt overgelaten de stroomlijnen en aequipotentiaallijnen te tekenen.

#### Tweede voorbeeld.

Gevraagd wordt de stroming te bepalen, waarvoor langs een lijnsegment  $-l < x < +l$  de potentiaal een constante waarde aanneemt en waarvoor de snelheid in het oneindige naar nul gaat.





Door een conforme transformatie

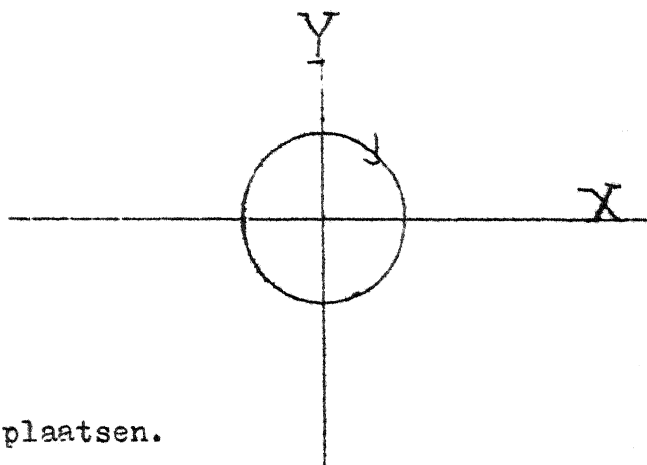
$$\frac{z}{l} = \frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{Z} \right)$$

wordt het lijnsegment  $-l < x < +l$  afgebeeld op de eenheidscirkel in het  $Z$  vlak. Immers, als  $Z = e^{i\varphi}$

is

$$z = \frac{1}{2} l (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = l \cos \varphi$$

Nu wordt de stroming in het  $Z$  vlak, waarbij de cirkel een stroomlijn is en die in het oneindige nul is, zoals we vroeger gezien hebben, opgeleverd door in de oorsprong een wervel te plaatsen.



$$\Phi(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln Z$$

Verder kunnen wij  $Z$  oplossen

$$Z^2 - \frac{2z}{l} Z + 1 = 0$$

$$Z = \frac{z}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 1},$$

zodat

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \lg \left\{ \frac{z}{l} + \sqrt{\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 1} \right\}$$

Wij kiezen het  $+$  teken omdat we wensen, dat het oneindig verre punt in het  $Z$  vlak correspondeert met het oneindig verre punt in het  $z$  vlak.

De wortelvorm suggereert ons om een nieuwe variabele in te voeren, n.l. te stellen

$$\frac{z}{l} = \cosh \xi \quad \xi = \xi + \eta i$$

immers dan wordt

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \lg \{ \cosh \xi + \sinh \xi \} = \frac{Q}{2\pi} \lg e^{\xi + i\eta} = \frac{Q}{2\pi} (\xi + i\eta)$$

De lijnen van constante potentiaal worden dan gegeven door  $\xi = \text{const.}$  en de stroomlijnen door  $\eta = \text{const.}$

Daar

$$\cosh(\xi + i\eta) = \cosh \xi \cos \eta + i \sinh \xi \sin \eta$$

is

$$x = l \cosh \xi \cos \eta,$$

$$y = l \sinh \xi \sin \eta.$$

De lijnen  $\xi = \text{const.}$  hebben tot vergelijking

$$\left(\frac{x}{l \cosh \xi}\right)^2 + \left(\frac{y}{l \sinh \xi}\right)^2 = 1$$

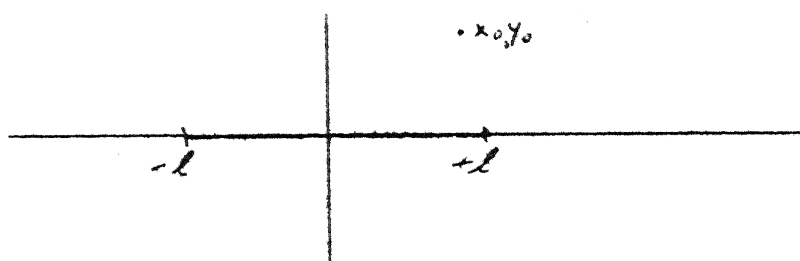
en stellen dus een stelsel confocale ellipsen voor, de lijnen  $\eta = \text{const.}$  hebben tot vergelijking

$$\left(\frac{x}{l \cos \eta}\right)^2 - \left(\frac{y}{l \sin \eta}\right)^2 = 1$$

en stellen het toegevoegde stelsel hyperbolen voor.

### Derde voorbeeld.

Gegeven hetzelfde lijnsegment met bronbelasting als in het vorige voorbeeld. Bovendien is een put in het punt  $x_0, y_0$  aanwezig.



Bij de conforme transformatie  $\frac{Z}{l} = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$  gaat het buitengebied van het lijnsegment over in het buitengebied van een cirkel en het punt  $Z_0 = x_0 + iy_0$  gaat over in het punt  $Z_0 = X_0 + iY_0$ . Om het stromingsveld in het  $Z$  vlak te bepalen, waarbij de cirkel stroomlijn is, gaan wij het punt  $Z_0$  spiegelen t.o.v. de cirkel.

Om dit spiegelingsbegrip met het aanschouwelijke begrip te laten overeenstemmen, beelden wij eerst even de cirkel  $|Z| = 1$  af op de  $u$ -as van een vlak  $w = u + iv$  (dit is geen snelheidsvlak!) door de transformatie

$$w = i \frac{Z+1}{Z-1} \quad \text{of} \quad Z = \frac{i+w}{w-i}$$

Immers, dan is als  $Z = e^{i\vartheta}$

$$w = i \frac{1+e^{i\vartheta}}{-1+e^{i\vartheta}} = -i \frac{1+\cos\vartheta+i\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta-i\sin\vartheta} = -i \cotg \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2} - i \cos \frac{\vartheta}{2}} = \cotg \frac{\vartheta}{2}$$

zodat het beeld van  $w$  de reële as doorloopt.

Het spiegelbeeld van  $w_0 = u_0 + i v_0$

is dan het toegevoegd complexe

$$\overline{w}_0 = u_0 - i v_0$$

zodat het spiegelbeeld van

$$Z_0 = \frac{i + w_0}{w_0 - i}$$

is

$$Z_0^* = \frac{i + w_0^*}{w_0^* - i}$$

Als  $Z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$ , dan is  $w_0 = i \cdot \frac{r_0 e^{i\vartheta_0} + 1}{r_0 e^{i\vartheta_0} - 1}$

en  $\overline{w}_0 = -i \frac{r_0 e^{-i\vartheta_0} + 1}{r_0 e^{-i\vartheta_0} - 1}$

en

$$Z_0^* = \frac{i(r_0 e^{-i\vartheta_0} + 1) - i(r_0 e^{-i\vartheta_0} - 1)}{-i(r_0 e^{-i\vartheta_0} + 1) - i(r_0 e^{-i\vartheta_0} - 1)} = \frac{-2i}{-2i r_0 e^{-i\vartheta_0}} = \frac{1}{r_0} e^{i\vartheta_0} = \frac{1}{Z_0}$$

zodat  $Z_0^*$  het punt is, dat uit  $Z_0$  door inversie ontstaat. Een bronstrooming in het  $w$  vlak, met bron in  $w_0$  waarbij de lijn  $v = 0$  equipotentiaallijn is, wordt weergegeven door een bron in  $w_0$  en een even grote put in  $\overline{w}_0$  zodat wij in het  $Z$  vlak eveneens een put in  $Z_0^*$  moeten aanbrengen. De potentiaal is dus

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \{ \lg(Z - Z_0) - \lg(Z - Z_0^*) \}$$

waaruit de stroomlijnen en equipotentiaallijnen gevonden kunnen worden. Door naar het  $Z$  vlak terug te gaan vinden wij dan het stromingsbeeld in dat vlak.

Mathematische theorie van de stroming door  
poreuze media.

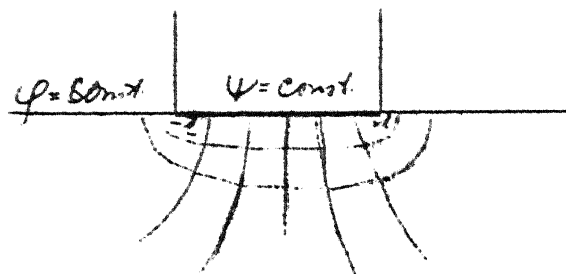
4. Grondwaterstroming onder een stuwlichaam.

Wij beschouwen verschillende gevallen van grondwaterstroming onder een stuwlichaam van oneindige breedte. Daar in iedere doorsnede het snelheidsveld hetzelfde is, kunnen wij ons beperken tot tweedimensionale stroming.

a) Dam op een oneindig dikke poreuze onderlaag.

Voor en achter de dam heerst constante potentiaal, langs de onderkant is de snelheid tangentiaal, d.w.z. daar is de stroom-snelheid constant.

Dit is juist het tweede voorbeeld met verwisseling van potentiaal en stroomfunctie.



De complexe potentiaal wordt dus opgeleverd door

$$\Phi = \varphi + i\psi = \frac{iQ}{2\pi} \ln \left\{ \frac{z}{\ell} + \sqrt{\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 - 1} \right\}$$

De stroomlijnen zijn confocale ellipsen en de equipotentiaallijnen zijn confocale hyperbolen.

Onder de dam varieert  $\varphi$  van  $\pi$  tot  $-\pi$

$$\varphi + i\psi = \frac{iQ}{2\pi} \ln \left\{ \frac{z}{\ell} + i\sqrt{1 - \left(\frac{z}{\ell}\right)^2} \right\} = \frac{iQ}{2\pi} \ln (\cos \xi + i \sin \xi) =$$

$$= \frac{-Q}{2\pi} \xi$$

$$\text{als } \frac{z}{\ell} = \cos \xi.$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \lg \cos \left( \frac{x}{\ell} \right)$$

Noemen wij het drukverschil tussen voor en achterkant  $\Delta p$ , dan is

$$\Delta p = - \frac{Q}{2\pi} \pi$$

dus  
en

$$Q = -2\Delta p$$

$$\varphi = \frac{\Delta p}{\pi} \lg \cos \frac{x}{\ell}$$

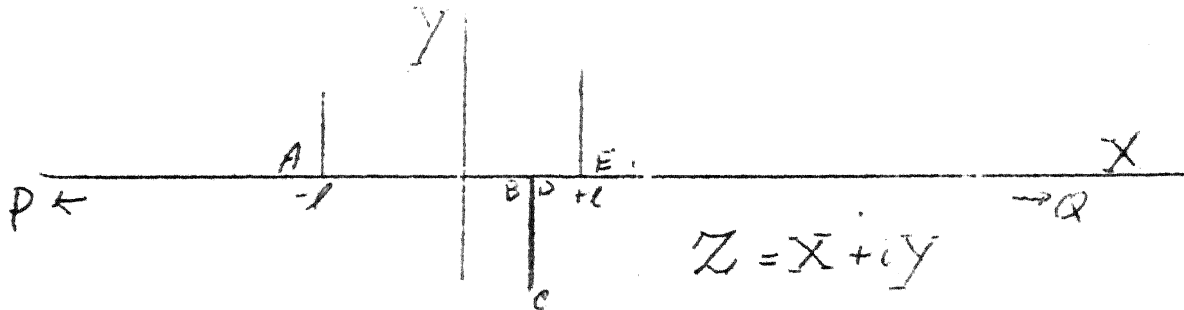
Voor de totale kracht op de dam vinden wij

$$K = \int_{-\ell}^{\ell} (p_1 + \frac{\Delta p}{\pi} \lg \cos \frac{x}{\ell}) dx = \ell \cdot \Delta p + 2\ell p_1 = (p_2 + p_1) \cdot \ell.$$

en voor het moment om het midden

$$M = \int_{-l}^{+l} \left( p_1 + \frac{\Delta p}{\pi} \lg \cos \frac{x}{l} \right) x dx = \frac{\Delta p}{4} l^2 = \frac{l^2}{4} (p_1 - p_2).$$

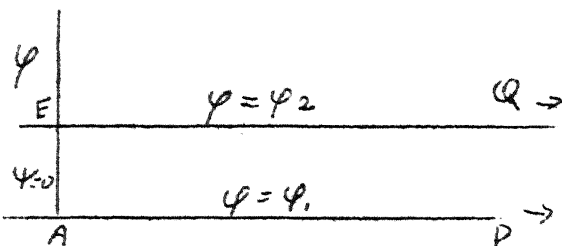
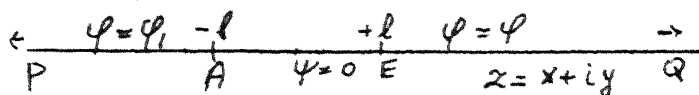
b) Dam met verticale scheidingswand.



Het vorige vraagstuk kwam in wezen neer op het volgende:

Gegeven langs de x-as, dat voor  $-l < x < +l$   $\psi = \text{const.}$  en in  $x < -l$  en  $x > +l$   $\psi = \text{const.}$

Wij zochten een afbeelding van het x,y-vlak op het  $\psi, \varphi$ -vlak, waarbij de x-as overgaat in de gebroken lijn PAEQ. In het nieuwe geval



geldt weer, dat langs de x-as voor  $x < -l$   $\varphi = \varphi_1$  en voor  $x > +l$   $\varphi = \varphi_2$ . Verder is de gebroken lijn ABCDE stroomlijn, zodat daarlangs  $\psi$  constant is.

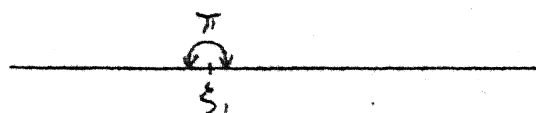
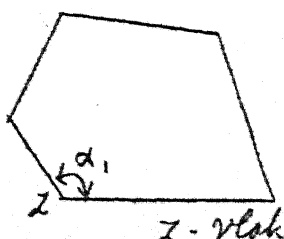
Ons probleem zal dus tot het vorige teruggebracht zijn, als het gelukt voor het  $Z =$

$Z = X + iY$ -vlak, het fysische vlak eerst af te beelden op een "hulpvlak"  $z = x + iy$ , waarbij de gebroken lijn ABCDE overgaat in het lijnsegment AE. Deze opgave voert ons direct tot de transformatie van Schwartz-Christoffel, die wij afzonderlijk behandelen.

Een veelhoek met hoekpunten in de punten  $z_k = x_k + iy_k$  met inwendige hoeken  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  kan conform afgebeeld worden op de bovenhalfte van een  $\zeta = \xi + i\eta$ -vlak door de transformatie

$$z = C_1 \int \frac{d\zeta}{(\zeta - \zeta_1)^{1-\alpha_1/\pi} (\zeta - \zeta_2)^{1-\alpha_2/\pi} \dots (\zeta - \zeta_n)^{1-\alpha_n/\pi}} + C_2$$

waarbij  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  de beeldpunten in het  $\zeta$ -vlak zijn van de hoekpunten  $z_1, \dots, z_n$  in het z-vlak.



Om deze stelling te bewijzen, merken wij op, dat een hoek  $\alpha_1$  van de contour omgezet moet worden in een hoek  $\pi$  in het  $\zeta$ -vlak.

Beschouw eerst een willekeurig punt in het  $z$ -vlak en laat  $\zeta$  het toegevoegde punt zijn. Dan is

$$z = f(\zeta)$$

en

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta)$$

Een lijnelementje  $dz$  in het  $z$ -vlak gaat over in een lijnelementje  $d\zeta = f'(\zeta) dz$  in het  $\zeta$ -vlak, d.w.z. de richting wordt gedraaid over een

hoek  $\arg f'(\zeta)$ .

Indien dus  $f'(\zeta)$  regulier is in het punt en  $\neq 0$ , worden alle lijnelementjes in het punt  $z$  over dezelfde hoek gedraaid en dus is de hoek tussen twee lijnelemen-

tjes  $dz_1$  en  $dz_2$  gelijk aan de hoek tussen de beelden van deze elementjes  $d\zeta_1$  en  $d\zeta_2$ . Hieraan ontleent de conforme transformatie haar naam, want deze betekent dat bij de transformatie hoeken onveranderd blijven. Hieruit volgt verder, dat in de hoekpunten van de veelhoek  $f'(z)$  niet regulier en  $\neq 0$  kan zijn.

Stel daarom in het punt  $z_1$ , dat in de omgeving

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)^{\lambda_1} (a_0 + a_1(\zeta - \zeta_1) + \dots)$$

dan moeten wij  $\lambda_1$  zo bepalen, dat een hoek  $\alpha_1$  overgevoerd wordt in een hoek  $\pi$ .

Voer even poolcoördinaten in met oorsprong in het punt  $z_1$  en als langs een zijde van de veelhoek

$$z - z_1 = r e^{i\varphi}$$

dan is de vergelijking voor de andere zijde

$$\varphi = \alpha_1$$

$$, \text{ dus } z - z_1 = r e^{i\alpha_1}$$

Verder schrijven wij

$$\zeta - \zeta_1 = \rho e^{i\vartheta}$$

dan moet  $\varphi = 0$  overgaan in  $\vartheta = 0$

en  $\varphi = \alpha_1$  overgaan in  $\vartheta = \pi$ .

Nu is bij benadering

$$\Delta x = z - z_1 \approx f'(\zeta) \Delta \zeta = f'(\zeta) (\zeta - \zeta_1) \approx (\zeta - \zeta_1)^{\lambda_1 + 1} a_0$$

dus

$$r \approx \rho^{\lambda_1 + 1} a_0$$

en

$$r e^{i\alpha_1} \approx \rho^{\lambda_1 + 1} a_0 e^{i\pi(\lambda_1 + 1)}$$

dus

$$\alpha_1 = \pi(\lambda_1 + 1)$$

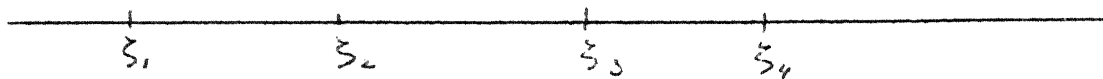
$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\pi} - 1$$

Wij zien dus, dat  $f'(\zeta)$  in ieder geval de vorm moet hebben

$$f'(\zeta) = A(\zeta - \zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\zeta - \zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\zeta - \zeta_k)^{\frac{\alpha_k}{\pi} - 1}$$

Verder is het duidelijk, dat nu ook inderdaad het beeld van de veelhoek in het  $z$ -vlak de  $x$ -as in het  $\zeta$ -vlak is. Immers doorloopt  $\zeta$  de reële as, dan is

$\arg(\zeta - \zeta_k) = \pi$  of  $0$  al naarmate  $\zeta$  links of rechts van het punt  $\zeta_k$  ligt



en dus is tussen twee hoekpunten  $\arg \frac{dz}{d\zeta} = \text{const.}$  d.w.z. het beeld doorloopt een recht lijnsegment.

Met behulp van deze stelling lossen wij nu het probleem op om de contour PABCDEQ op de reële as af te beelden.

De hoeken zijn bij B  $\pi/2$

bij C  $2\pi$

bij D  $\pi/2$

Laat nu  $\zeta = 1$  toegevoegd zijn aan D  $z = +b$

$\zeta = 0$  " " " C  $z = +b - id$

$\zeta = -1$  " " " B  $z = b$

$\zeta = -\infty$  " " " P

dan wordt de afbeeldingsfunctie

$$z = f(\zeta) = A \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta-1)^{1/2} (\zeta+1)^{1/2}} + B =$$

$$= A \int \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} + C = A \sqrt{\zeta^2 - 1} + B$$

De constanten A en B worden bepaald uit de voorwaarden

$$b = B$$

$$b - id = B + Ai$$

$$A = -d$$

zodat wij krijgen

$$z = -d \sqrt{\zeta^2 - 1} + b$$

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{z-b}{d}\right)^2}$$

De beeldpunten in het  $\zeta$ -vlak van de uiteinden van de dam zijn:

$$A \quad \xi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{l+l}{d}\right)^2}$$

$$E \quad \xi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b-l}{d}\right)^2}$$

Het probleem is nu teruggebracht tot het vroegere probleem, want door in het  $\xi$ -vlak als nieuwe coördinaten in te voeren

$$\xi' = \xi - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \quad \text{en te stellen} \quad l' = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}$$

zien wij, dat we een functie moeten bepalen, zodanig dat voor  $-l' < \xi' < +l'$   
 $\varphi = 0$ , voor  $\xi' < -l'$   $\varphi = \varphi_1$  en  $\xi' > +l'$   $\varphi = \varphi_2$  is.



Mathematische theorie van de stroming door  
poreuze media.

Stroming met gravitatieinvloed.

In een verticaal veld is de potentiaal gegeven door

$$\phi = \frac{\kappa}{\mu} (p + \gamma g y)$$

waarbij  $\kappa$  = permeabiliteit

$\mu$  = viscositeit

$\gamma$  = dichtheid

$y$  = hoogte van het punt

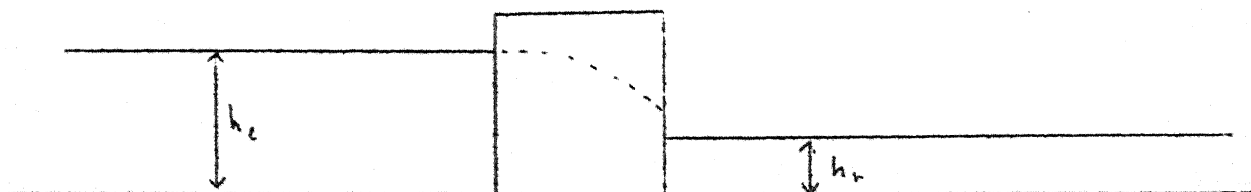
De continuïteits vergelijking leert ons weer, dat  $\phi$  voldoet aan de vergelijking van Laplace

$$\Delta \phi = 0$$

Voor het geval, dat het stromingsveld begrensd is door vaste wanden is er geen verschil met de stroming in een horizontaal vlak en de behandeling geschiedt volkomen analoog met voorgaande gevallen. Anders wordt dit, als een "vrij oppervlak" optreedt. Zo'n vrij oppervlak is een vloeistof oppervlak in evenwicht met de atmosfeer. Daar de vloeistof langs het oppervlak stroomt, is het ook een stroomlijn. Wij kunnen dus zeggen: een vrij oppervlak is een stroomlijn, waarlangs de druk uniform is. De plaats van het oppervlak ligt echter niet vast, zodat de mathematische moeilijkheden ontzaglijk toenemen want de vorm van het oppervlak moet samen met de onbekende potentiaal bepaald worden.

In het driedimensionale geval is dit zo moeilijk, dat in de literatuur geen betrouwbare methode bekend is. Tweedimensionaal kan het echter wel met behulp van de methode van de hodograaf, die voor het eerst is ingevoerd door Hamel. (ZAMM, 14, 1934).

Wij bespreken hier als voorbeeld stroming door een dijk met verticale wanden, waarbij aan weerskanten water staat



Hierbij treedt, behalve het vrije oppervlak, nog een complicatie op,

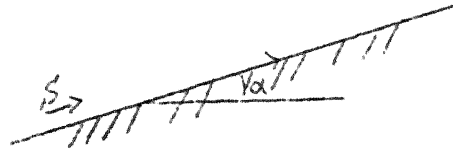
n.l. het kweloppervlak waarbij de vloeistof een gebied binnenkomt, waar de druk constant is langs een vaste kromme. Wij moeten dus beginnen met de randvoorwaarden voor verschillende gevallen op te schrijven.

a) ondoorlaatbare wanden.

Deze zijn noodzakelijk stroomlijnen, zodat hier geldt in ieder punt

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \alpha$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \alpha$$



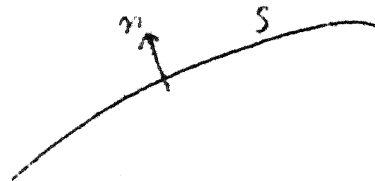
als  $s$  de coördinaat langs de wand is,  $\phi$  de snelheidspotentiaal en  $\alpha$  de hellingshoek

b) Equipotentiaalvlak.

Hier is, bij definitie  $\phi = \text{const.}$  en de snelheidscomponenten zijn

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \sin \alpha$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \alpha$$



c) vrije oppervlakken.

Deze zijn gekarakteriseerd door  $p = \text{const.}$  dus

$$\phi - \bar{K} y = C \quad \bar{K} = \frac{\kappa g g}{\mu}$$

Indien  $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \alpha$

geldt  $-\bar{K} \sin \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$

Verder is het oppervlak stroomlijn, dus is  $\frac{\partial \phi}{\partial s}$  de totale snelheid op het oppervlak

$$\text{Dus } -\bar{K} \sin \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)^2 = 0$$

$$\text{of wel } v^2 + u^2 + \bar{K} v = 0$$

d) kweloppervlakken

Ook hier is de druk constant, dus

$$\phi - \bar{K} y = C$$

of wel

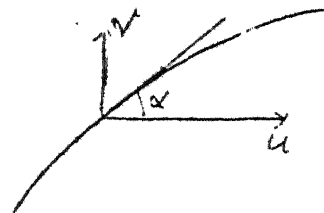
$$-\bar{K} \sin \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$$

Verder is dit oppervlak geen stroomlijn, dus is

$$-\frac{\partial \phi}{\partial s} = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

Zodat wij als vergelijking krijgen

$$(v + \bar{K}) \sin \alpha + u \cos \alpha = 0$$



In al deze gevallen is de vergelijking teruggebracht tot een betrekkelijk eenvoudige vergelijking tussen  $u$  en  $v$ , in het bijzonder als de hoek  $\alpha$  constant is, als dus in het  $x, y$  vlak de vaste grenzen rechte lijnen zijn. Het ligt dus voor de hand om een vlak te beschouwen met  $u$  en  $v$  als coördinaten, het vlak van de hodograaf. In dit vlak krijgen wij als beeld van de genoemde lijnen, als  $\alpha$  een constante waarde heeft

a) ondoorlaatbare wand.

$$\frac{u}{v} = \cot \alpha, \text{ dus een rechte lijn door de oorsprong}$$

b) equipotentiaalvlak

$$\frac{u}{v} = \tan \alpha, \text{ ook een rechte lijn door de oorsprong.}$$

c) vrij oppervlak

$$\left(r + \frac{1}{2} \bar{k}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{4} \bar{k}^2,$$

dus een cirkel door de oorsprong.

d) kweloppervlak

rechte lijn, niet door de oorsprong.

Deze methode kan dan in het vlak van de hodograaf een beeld leveren, van een stroming met een vrij oppervlak, dat verder met conforme transformatie behandeld kan worden

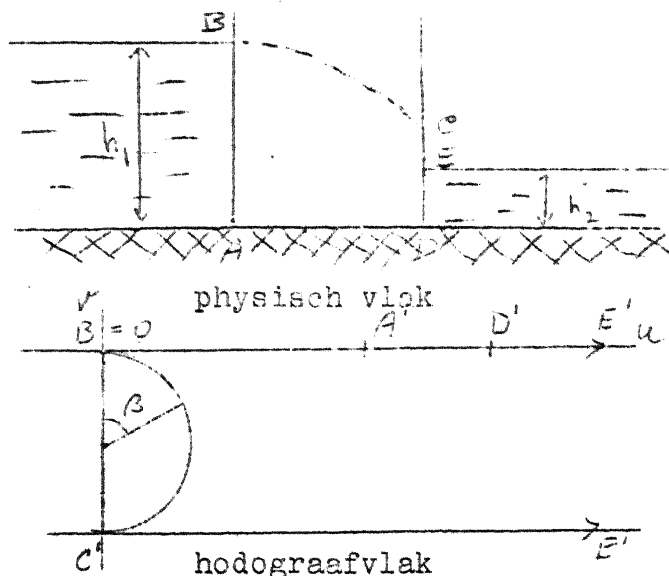
Mathematische theorie van de stroming door  
poreuze media.

In het genoemde geval van een dijk met verticale wanden op een ondoorlaatbare laag is langs AB de potentiaal constant en geeft dus in het hodograafvlak een horizontaal lijnsegment van de u-as, de lijn BC moet in het punt B aansluiten aan dit segment. BC is een vrij oppervlak en wordt dus in het vlak van de hodograaf voorgesteld door een stuk van een cirkel door de oorsprong

$(v + \frac{1}{2} \bar{k})^2 + u^2 = \frac{1}{4} \bar{k}^2$ , d.w.z.

in B moet de snelheid nul zijn, B is een stuwpunt. Verder is het segment CE een kweloppervlak, dat in het vlak van de hodograaf wordt voorgesteld door een rechte lijn, die niet door de oorsprong gaat loodrecht op het oppervlak, hier dus een lijn evenwijdig aan de U-as, met vergelijking

$$v + \bar{k} = 0.$$



Hieruit volgt, dat deze lijn de cirkel van het vrije oppervlak in het punt  $v = -\bar{k}$  raakt; dat punt correspondeert dus met C. Het segment AD is een stroomlijn, hier is dus de snelheid weer langs de U-as gericht, d.w.z. in het punt A', ergens op de U-as sluiten het beeld van BA en AD aan elkaar. Evenzo is DE een equipotentiaalvlak en dit beeld sluit in het nog onbekende punt D' op de U-as aan dat in AD. Nu ligt C'E' langs de lijn  $v = -\bar{k}$  en D'E' langs  $v = 0$ ; hun snijpunt kan alleen zijn het punt  $u = \infty$ . Op deze wijze is in het hodograafvlak een gesloten beeld gekregen, dat (op de ligging van de punten A' en D' na) geheel vastligt, in tegenstelling tot het fysische vlak, waar de vorm van de grens BC onbekend is.

Nu zoeken wij in het hodograafvlak een functie, waarvoor wij op deze contour randwaarden kunnen voorschrijven. Beschouw daartoe de complexe potentiaal  $\omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$  dan is langs

- AB =  $\varphi = \text{const.}$
- BC  $\psi = \text{const.}, \quad \varphi = C_1 + \bar{k}y.$
- CE  $\varphi = C + \bar{k}y.$
- ED  $\varphi = \text{const.}$
- AD  $\psi = \text{const.}$

Wij zien dat de functies  $\varphi$  en  $\psi$  of constant zijn of uitgedrukt worden in de coördinaten  $x$  en  $y$ . Om nu een functie te vinden, die bekend is langs de omtrek van de figuur in het  $(u,v)$  vlak, schrijven we eerst

$$u - iv = \frac{dw(z)}{dz}, \quad u + iv = \overline{w'(z)}$$

en differentiëren nogmaals.

Dan is langs AB  $u = \frac{3\varphi}{2}$ ,  $v=0$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{du - i dv}{dx + i dy} = -i \frac{du}{dy}$$

dus zuiver imaginair.

langs BC

$$u^2 + v^2 + \bar{k}v = 0$$

en dus

$$du = - \frac{v + \bar{k}/2}{u} dv$$

Verder is hier, omdat het vrije oppervlak stroomlijn is

$$dy = \frac{u}{v} dx$$

zodat

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{-(v + \frac{\bar{k}}{2}) - iu}{u + iv} \cdot \frac{dx}{dx}$$

langs CE  $v = -\bar{k}$ ,  $x = \text{const.}$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{du}{i dy} = -i \frac{du}{dy}$$

langs ED is  $\varphi = \text{const.}$ , dus evenals langs lijn AB

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -i \frac{du}{dy}$$

terwijl tenslotte langs DA

$$\varphi = \text{const}, \quad v=0, \quad y=0$$

dus

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{du}{dx}$$

Wij zien dus, dat  $\arg(\frac{d^2w}{dz^2})$  langs de gehele omtrek gegeven is en dat voert ons ertoe om te stellen

$$\sigma + i\tau = \log\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)$$

Dan zijn de randvoorwaarden voor  $\tau$

$$\text{AB} \quad \tau = -\frac{\pi}{2}$$

Langs BC voeren wij eerst de hoek  $\beta$  in, zodat op de cirkel

$$u = \frac{k}{2} \sin \beta = k \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta$$

$$v = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k \cos \beta = k \sin^2 \frac{1}{2}\beta$$

en dus

$$\tau = \arg \frac{-\frac{k}{2} \cos \beta - i \frac{k}{2} \sin \beta}{\frac{k}{2} \sin \beta - i \frac{k}{2} + i \frac{k}{2} \cos \beta} = \arg \frac{-e^{i\beta}}{ie^{-i\beta} - i}$$

$$= \arg \frac{-e^{i\frac{1}{2}\beta}}{-i2i\sin\beta} = \frac{3}{2}\beta$$

langs CE is  $\tau = -\frac{\pi}{2}$

langs ED eveneens  $\tau = -\frac{\pi}{2}$

en tenslotte langs DA  $\tau = 0$

Wij gaan nu de figuur in het vlak van de hodograaf afbeelden op de bovenhelft van een  $\lambda$  vlak, dan zijn in dit vlak de waarden van het imaginaire stuk van de functie  $(\sigma + i\tau)$  op de reële as gegeven.

Transformeer eerst het hodograafvlak op een standaardvorm door een draaiing, zodat C'B' in de oorsprong komt en B' in het punt  $q=1$ .

$$q = \frac{i}{k}(u-iv) + 1$$

terwijl de lijnen E'E' en C'E' overgaan in verticale lijnen.

Nu is de functie, die de op deze

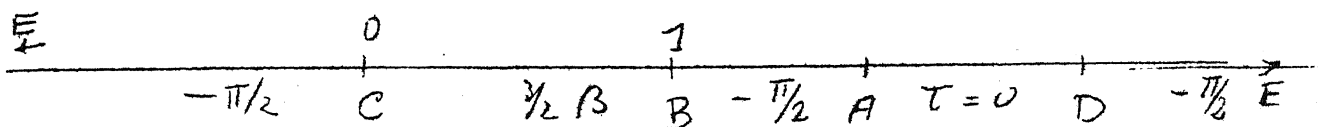
wijze gevormde figuur afbeeldt op de

bovenkant van het  $\lambda$  vlak bekend als

de elliptische modulaire functie en als zodanig getabelleerd. Hierbij is

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda(1) = 1, \quad \lambda(i\infty) = -\infty, \quad \lambda(1+i\infty) = +\infty$$

en wij krijgen dus in het  $\lambda$  vlak voor de functie  $\tau$  op de reële as voorgeschreven waarden



Hierbij is het verband tussen  $\lambda$  en  $\beta$  gegeven door

$$\lambda = \lambda\left[\frac{1}{2}(1+e^{i\beta})\right].$$

Wij moeten dus nu in het platte vlak het probleem oplossen een functie te bepalen, waarvan op de reële as het reële deel gegeven is. Noem het vlak  $Z=X+iY$  en de functie

$W=U+iV$ , dan is voor  $y=0$

$$U(x) = f(x).$$

Indien we de functie  $W$  in het punt  $Z_0 = X_0 + iY_0$  ( $Y_0 > 0$ ) zoeken, passen wij de stelling van Cauchy op het gebied begrensd door een halve cirkel en de  $X$ -as toe.



$$W(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{W(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{W(x) dx}{x - x_0 - i y_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{cirkel}} d\beta$$

Indien nu  $W(z)$  voor grote  $R$  in het bovengedeelte voldoende snel naar nul toegaat, is de integraal over de halve cirkel in de limiet (achteraf verifiëren!) nul.

Passen wij de stelling toe op hetzelfde gebied maar met het toegevoegde punt  $Z_0 = X_0 - iY_0$  dan is de integraal nul, omdat het punt buiten het gebied ligt

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x,0) + i v(x,0)}{(x-x_0) + i y_0} dx$$

Optellen en aftrekken levert

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{u(x,0) + i v(x,0)\}}{(x-x_0)^2 + y_0^2} (x-x_0) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{u(x,0) + i v(x,0)\}}{(x-x_0)^2 + y_0^2} y_0 dx \end{aligned}$$

Door gelijkstellen van reële en imaginaire delen kunnen wij nu  $U(X_0, Y_0)$ , zowel als  $V(X_0, Y_0)$  in de gegeven waarden van  $U(X, 0)$  uitdrukken

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x,0) dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2},$$

$$v(x_0, y_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x,0)(x-x_0) dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2}$$

zodat

$$\begin{aligned} W(Z_0) &= u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) \{ (x-x_0) + i y_0 \} dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

Indien wij nu de coördinaten van  $A$  en  $D$  in het  $\lambda$  vlak met  $a$  en  $b$  aanduiden (nog niet bekend!), dan vinden wij nu de functie  $\frac{d^2 \omega}{dz^2} = i\sigma + \tau$

$$i\sigma + \tau = \frac{-3}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon) d\varepsilon}{\lambda - \varepsilon} + \frac{1}{2i} \log \frac{\lambda - 1}{(\lambda - a)(\lambda - b)\lambda}$$

zodat

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} = \sqrt{\frac{(\lambda - b)(a - \lambda)\lambda}{\lambda - 1}} e^{-\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda}}$$

Daar  $\lambda = \lambda(q)$  een bekende functie is van  $\omega'(z) = u - iv$ , is ook  $\omega''(z) = F[\omega(z)]$  en is

$$z + \int \frac{d(u - iv)}{F(u - iv)} = \int e^{\sigma + i\tau} \cdot d(u - iv)$$

Zo is dus  $z$  tenslotte bekend als de functie van  $U - iV$  en het probleem is in principe opgelost. Hierbij moet opgemerkt worden, dat de constanten  $a$  en  $b$  eerst uit de eindformules bepaald kunnen worden.

Mathematische theorie van de stroming door poreuze media.

Stroming van twee homogene vloeistoffen met gemeenschappelijk grensvlak door een poreus medium in het zwaartekrachtveld.

1. Probleemstelling.

Wij beschouwen de stroming van twee vloeistoffen met dichtheden  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  ( $\gamma_2 > \gamma_1$ ) met een op het tijdstip  $t=0$  horizontaal grensvlak, waarbij de tweede vloeistof zich onder de eerste bevindt.

De potentiaal van een vloeistof met soortelijke massa  $\gamma$  in het gravitatieveld wordt gegeven door

$$\phi = z + \frac{p}{\gamma g}$$

als  $p$  de druk voorstelt.

Volgens de wet van Darcy wordt dan de snelheid gegeven door

$$\vec{v} = k \text{ grad } \phi$$

waarbij  $k$  de constante van Darcy voorstelt.

In het eerste medium is de potentiaal dus gegeven door

$$\phi_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1 g}$$

en de snelheid door

$$\vec{v}_1 = k_1 \text{ grad } \phi_1,$$

in het tweede medium worden deze formules

$$\phi_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2 g}$$

$$\vec{v}_2 = k_2 \text{ grad } \phi_2$$

Op het scheidingsvlak moet de druk continu zijn en de normaalcomponenten van de snelheid moeten gelijk zijn

$$z_1 = z_2, \quad p_1 = p_2$$

$$\vec{v}_{1n} = \vec{v}_{2n}$$

Hieruit volgt, dat daar

$$k_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}.$$

Voor het gemak voeren wij nieuwe potentialen in

$$\varphi_1 = k_1 \phi_1, \quad \varphi_2 = k_2 \phi_2,$$



zodat

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

en verder

$$\varphi_1 = k_1 z + \frac{k_1 p}{\gamma_1 g}$$

$$\varphi_2 = k_2 z + \frac{k_2 p}{\gamma_2 g}$$

Op het scheidingsvlak is dus

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (k_1 - k_2)z + \left( \frac{k_1}{\gamma_1 g} - \frac{k_2}{\gamma_2 g} \right) p,$$

en verder is

$$\vec{v}_1 = \text{grad } \varphi_1, \quad \vec{v}_2 = \text{grad } \varphi_2.$$

Wij kunnen dus in het gehele veld het stromingsbeeld beschreven denken door één enkele potentiaalfunctie  $\varphi$ , die ter plaatse van het scheidingsvlak een discontinuïteit vertoont van de grootte

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= (k_1 - k_2)z + \left( \frac{k_1}{\gamma_1} - \frac{k_2}{\gamma_2} \right) \frac{p}{g} = \\ &= \left\{ k_1 - k_2 - (k_1 + k_2) \frac{k_1/\gamma_1 - k_2/\gamma_2}{k_1/\gamma_1 + k_2/\gamma_2} \right\} z + \frac{k_1/\gamma_1 - k_2/\gamma_2}{k_1/\gamma_1 + k_2/\gamma_2} (\varphi_1 + \varphi_2) = \\ &= \frac{2k_1 k_2 (1/\gamma_2 - 1/\gamma_1)}{k_1/\gamma_1 + k_2/\gamma_2} z + \frac{k_1/\gamma_1 - k_2/\gamma_2}{k_1/\gamma_1 + k_2/\gamma_2} (\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

In de meeste gevallen is de tweede term klein t.o.v. de eerste, zodat wij deze verwaarlozen. (Voorbeeld:

bron op afstand 50 m. van scheidingsvlak zoet-zout water.

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi \cdot 50}$$

Neem  $Q = 250 \text{ m}^3/\text{dag}$ , en

$$k_1 = k_2 = 30$$

en neem

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1.02$$

dan wordt de tweede term

$$0,01 \frac{250}{4\pi \cdot 50} = 0,0015$$

en de eerste voor  $z = 1 \text{ m}$ .

$$30 \cdot 0,02 = 0,6).$$

Wij krijgen het volgende probleem ter oplossing. Voor  $t < 0$  is gegeven een samenstel van twee vloeistoffen (zout en zoet water) met een horizontaal scheidingsvlak. Op het tijdstip  $t=0$  worden pompen in werking gesteld; mathematisch gesproken, worden aan de potentiaal zekere voorgeschreven singulariteiten opgelegd. Deze beïnvloeden de ligging van scheidingsvlak, zodat een discontinuïteitsvlak voor de potentiaal ontstaat, dat evenredig is met de hoogte van het scheidingsvlak boven zijn aanvankelijke ligging.



## 2. Oplossingsmethode voor het tweedimensionale probleem.

Een discontinuïteitsvlak van de potentiaal komt overeen met een dipoolbelegging.

Beschouw n.l. het veld van een enkele dipool. De complexe potentiaal van een enkele pool in het punt  $z_0$  is  $\frac{1}{2\pi} \log(z-z_0)$  en van een dipool met asrichting  $\vartheta$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial u} \log(z-z_0 + u e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{z-z_0} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\{(x-x_0)\cos\vartheta + (y-y_0)\sin\vartheta\} + i\{(x-x_0)\sin\vartheta - (y-y_0)\cos\vartheta\}}{\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\}}$$

de potentiaal is dan

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_0)\cos\vartheta + (y-y_0)\sin\vartheta}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log r.$$

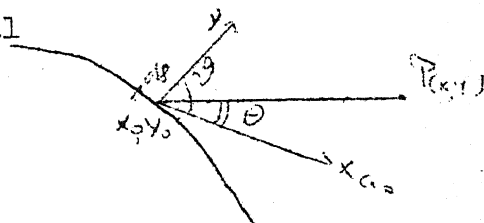
Als  $\vartheta$  een coördinaat langs de asrichting aanduidt en  $r$  de afstand van het punt waar de potentiaal bepaald wordt tot de dipool.

Een kromme lijn, die belegd is met dipolen ter sterkte  $\Lambda(s)$  en asrichting normaal op de kromme, heeft de potentiaal

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int \Lambda(s) ds \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log r$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \Lambda(s) \frac{\cos\vartheta \cos\theta + \sin\vartheta \sin\theta}{r} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \Lambda(s) \frac{ds}{r} \cos(\vartheta - \theta)$$

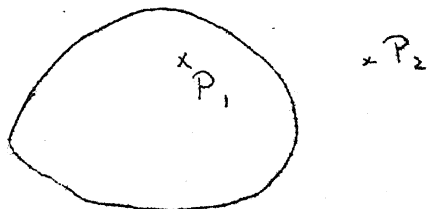


als  $\vartheta$  de hoek van de normaal en  $\theta$  de hoek van de voerstraal met de  $x$ -as aanduidt. Hieruit volgt, dat  $ds \cdot \cos(\vartheta - \theta)$  de projectie voorstelt van het elementje  $ds$  op de normaal op de voerstraal en de uitdrukking  $\frac{ds \cdot \cos(\vartheta - \theta)}{r}$  stelt voor de hoek waaronder het boogelementje  $ds$  vanuit  $P(x, y)$  gezien wordt.

Voor een constante belegging van dipolen  $\Lambda(s) = \Lambda = \text{const.}$  vinden wij dus voor  $\varphi$  de uitdrukking

$$\varphi = \Lambda \cdot \frac{\text{hoek, waaronder de kromme gezien wordt in P.}}{2\pi}$$

Beschouw nu een gesloten kromme. Uit een punt binnen de kromme is de totale hoek, waaronder de kromme wordt gezien  $2\pi$  en voor een punt daarbuiten is deze hoek nul. Op de kromme maakt de potentiaal een sprong ter grootte  $\Lambda$ . Nu geldt ook voor een niet constante belegging, dat de potentiaal op de



kromme een sprong maakt, die gelijk is aan de waarde van  $\Lambda$  in het punt dat we beschouwen. Men kan n.l. bewijzen, dat de potentiaal die overblijft, indien wij een constante belegging met een sterkte gelijk aan de sterkte van de sprong in het beschouwde punt aftrekken, continu blijft, zodat de sprong juist zo groot is als boven is aangegeven. Omgekeerd, als wij weten, dat de potentiaal langs het scheidingsvlak een sprong maakt, kan zij voorgesteld worden als de potentiaal van een

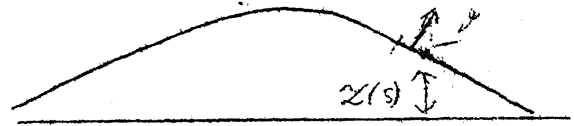
dipoolbelegging en in het beschouwde geval krijgen we als totale potentiaal

$$\varphi_{tot} = \varphi_1 + \int \Lambda(s) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \log r \cdot ds$$

waarbij  $\varphi_1$  de op het tijdstip  $t=0$  intredende potentiaal is (potentiaal van de bronnen) en

$$\Lambda(s) = \frac{2K_1 K_2 \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right)}{K_1/s_1 + K_2/s_2} \cdot z(s)$$

Hierbij is  $z(s)$  de hoogte van het discontinuïteitsvlak boven zijn aanvankelijke stand. Wij kunnen deze formule nog iets anders schrijven en tevens gemakkelijker toegankelijk maken voor berekening.



$$\int \Lambda(s) \frac{\partial}{\partial \nu} \log r \cdot ds =$$

$$\int \Lambda(s) \frac{(x-x_0)\cos\vartheta + (y-y_0)\sin\vartheta}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dz = - \int \Lambda(s) \frac{(x-x_0)d\vartheta - (y-y_0)dx}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} =$$

$$= - \int \Lambda(s) \cdot d \cdot \log \tan \frac{y-y_0}{x-x_0} = \left[ \Lambda(s) \log \tan \frac{y-y_0}{x-x_0} \right] + \int \log \tan \frac{y-y_0}{x-x_0} d\Lambda(s).$$

Indien de integratiegrenzen zodanig zijn, dat de geïntegreerde termen wegvallen, blijft over

$$\int \log \tan \frac{y-y_0}{x-x_0} d\Lambda(s),$$

d.w.z. de potentiaal van een wervellaag met een sterkte gelijk aan de afgeleide van de oorspronkelijke beleggingsfunctie.

Dit stelt voor de potentiaal van een wervellaag met de sterkte  $\frac{d\Lambda}{ds}$ , uitgespreid over het discontinuïteitsvlak. Uit de nu verkregen potentiaal kan in ieder punt de snelheid berekend worden.

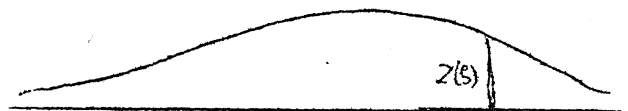
$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_0} \int \log \tan \frac{y-y_0}{x-x_0} d\Lambda(s),$$

$$v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial}{\partial y_0} \int \log \tan \frac{y-y_0}{x-x_0} d\Lambda(s).$$

Indien  $x_0, y_0$  niet op de kromme ligt, kunnen wij differentieren onder het integraalteken en krijgen dan

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \int \frac{(y-y_0) d\Lambda(s)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} - \int \frac{(x-x_0) d\Lambda(s)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$



Om de beweging van de deeltjes van het grensvlak te beschrijven, gebruiken wij de beschouwingswijze van Lagrange en karakteriseren de deeltjes door hun  $x$ -coördinaat op het tijdstip  $t=0$ ,  $x=\lambda$ .

De snelheden en de coördinaten van de deeltjes zijn dan functies van  $\lambda$  en  $t$  en wij krijgen de integrodifferentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial x_0(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \frac{d\Lambda(\mu, t)}{d\mu} d\mu,$$

$$\frac{\partial y_0(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \frac{d\Lambda(\mu, t)}{d\mu} d\mu.$$

waarbij

$$\Lambda(\mu, t) = \sigma y(\mu, t)$$

De beginvoorwaarden zijn  $t=0 \begin{cases} x_0 = \lambda \\ y_0 = 0 \end{cases}$

en de vergelijkingen kunnen door numerieke integratie opgelost worden.

Mathematische theorie van de stroming door poreuze media.

De verkregen vergelijkingen zijn echter uitermate gecompliceerd, immers voor iedere stap  $\Delta t$  moeten uit de bekende vorm van het discontinuïteitsvlak de integralen berekend worden en wel voor ieder punt van het vlak. Dan is de snelheid van elk punt bekend en dus ook de normaalsnelheid zodat in het tijdsverloop  $\Delta t$  de verplaatsing van het vlak berekend kan worden. Uit de verplaatsing volgt de nieuwe stand van het vlak en daaruit volgen dan de nieuwe snelheidscomponenten.

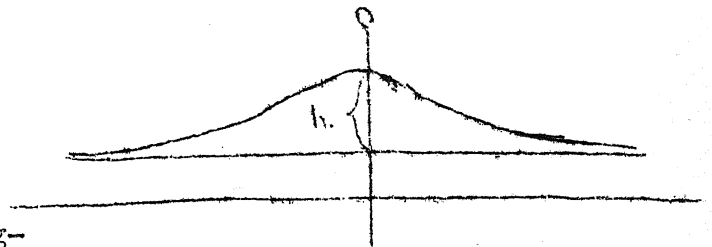
Teneinde het rekenwerk te bekorten is naar een eenvoudiger methode gezocht, die redelijk nauwkeurige resultaten levert.

In het algemeen zal het grensvlak onder een bron de gedaante hebben van een klokvormige kromme met top vlak onder de bron, die asymptotisch nadert tot de ongestoorde stand van

het vlak. Van de beweging van het grensvlak is ook alleen de beweging van het bovenste punt interessant.

Neem nu aan, dat de kromme afhangt van slechts twee parameters, de hoog-

te  $h$  en omdat te verwachten is, dat de vorm van de kromme in de omgeving van de top het belangrijkste is, de kromming  $k$  van het bovenste punt.



Stellen wij nu de potentiaal van de wervel in het punt  $x, y$  voor door

$$K(x, y; x_0, y_0) = b g \operatorname{tg} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

dan worden de vergelijkingen

$$u = \frac{\partial x_0(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda \{x(\mu), y(\mu)\}}{d\mu} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_0} d\mu,$$

$$v = \frac{\partial y_0(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\partial K}{\partial y_0} d\mu$$

De vorm van het scheidingsvlak stellen wij nu voor door

$$x = h \cdot f\left(\frac{x}{a}\right),$$

waarbij  $a$  een vaste lengte is.

De kromming in de top van de kromme is

$$K \frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{h}{a^2} \cdot f''\left(\frac{x}{a}\right).$$

Om de verandering van  $R$  door een differentiaalvergelijking voor te geven, berekenen wij eerst nu de top van een vaste  $t$

$$\frac{dy}{dx_0} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_0} = 0.$$

en

$$K = -\frac{d^2 y_0}{dx_0^2} = -\frac{\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} - \frac{dy_0}{dx_0} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \lambda^2}}{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \lambda}\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}.$$

Stellen wij nu

$$\varphi(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_0, y_0, x(\mu), y(\mu)) \frac{d\Lambda(x(\mu), y(\mu))}{d\mu} d\mu + \varphi(x_0, y_0).$$

dan volgt direct uit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$$

dat

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \frac{\partial x_0}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial y_0} \frac{\partial x_0}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \frac{\partial y_0}{\partial y_0}$$

nogmaals differentieren van de tweede vergelijking levert, daar wegens de symmetrie

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y_0^2 \partial x_0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 0.$$

voor  $x_0$  de vergelijkingen

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \left( \frac{\partial x_0}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \frac{\partial x_0}{\partial x_0}$$

Verder is voor  $x_0 = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial x_0}{\partial x_0} \right)^2 \left[ -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \frac{\partial x_0}{\partial x_0} + \left( \frac{\partial x_0}{\partial x_0} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \right] =$$

$$+ \left[ -2 K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} - K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \right]$$

en

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}.$$

De differentiaalvergelijkingen van  $h$  en  $K$  worden nu gevonden door de uitdrukking van  $K$  te substitueren.

$$\frac{\partial K}{\partial x_0} = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial y_0} = \frac{-(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_0^2} = \frac{2(y - y_0)(x - x_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}^2}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{-(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}^2}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y_0^2} = \frac{2(x - x_0)(y - y_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}^2}$$

$$\frac{\partial^3 K}{\partial x_0^2 \partial y_0} = \frac{2(x - x_0) \{ -(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \}}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}^3}$$

zodat de vergelijkingen worden

$$\frac{\partial h}{\partial x_0} = -K \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Lambda}{d\mu} \frac{x(\mu) \{ h - y(\mu) \}}{\{ x(\mu)^2 + (h - y(\mu))^2 \}^2} d\mu + \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Lambda}{d\mu} \frac{x(\mu) \{ x(\mu)^2 + (h - y(\mu))^2 \}}{\{ x(\mu)^2 + (h - y(\mu))^2 \}^3} d\mu \right.$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Lambda}{d\mu} \frac{x(\mu) \{ x(\mu)^2 - (h - y(\mu))^2 \}}{\{ x(\mu)^2 + (h - y(\mu))^2 \}^3} d\mu$$

Verder merken wij op dat de dipoolsterkte  $\Lambda$  gegeven wordt door

$$\Lambda(\mu, 1) = \sigma y(\mu, 1).$$

zodat

$$\frac{d\Lambda}{d\mu} = \sigma \frac{dy}{d\mu}.$$

Indien wij nu voor  $y$  als functie van  $x$  een Gauss-kromme substitueren

$$y = h e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

dan is

$$\kappa = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{2x}{a^2} \longrightarrow a^2 = \frac{2h}{\kappa}$$

en

$$\frac{dA}{d\mu} = -\frac{2hx}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{d\mu} = -\kappa x e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \frac{dx}{d\mu}$$

Voeren wij dan als integratievariabele  $x$  in in plaats van  $\mu$ , dan worden de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} = & -\kappa \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x=0, y=h} - \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right)_{0,h} + 2h\kappa \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \left( 1 - e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \right)}{x^2 + h^2 \left( 1 - e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \right)^2} dx + \\ & - 2h\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \left\{ 3h^2 \left( 1 - e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \right)^2 - x^2 \right\}}{\left\{ x^2 + h^2 \left( 1 - e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \right)^2 \right\}^3} dx \end{aligned}$$

In de eerste vergelijking komt nog een moeilijkheid voor, die opgelevord wordt door de divergentie van de integraal. Deze is ontstaan doordat onder het integraalteken gedifferentieerd is. Zij wordt ondervangen door in een omgeving van  $x=0$ , niet  $\kappa$  voor  $y=h$  maar voor  $y=h(1+\delta)$  te berekenen en de integraal dus te vervangen door

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2 e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \left\{ 3h^2 \left( 1 + \delta - e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \right)^2 - x^2 \right\}}{\left\{ x^2 + h^2 \left( 1 + \delta - e^{-\frac{\kappa x^2}{2h}} \right)^2 \right\}^3} dx$$

deze integraal door een reeksontwikkeling te benaderen en dan  $\delta \rightarrow 0$  te laten gaan. Men kan bewijzen, dat in dit geval een eindige limiet bestaat.

De twee differentiaalvergelijkingen kunnen nu door numerieke integratie opgelost worden, uitgaande van de beginvoorwaarden  $h=0$ ,  $R=0$ .

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 1 Febr. 1951.

Twee vraagstukken uit de theorie der temperatuurspanningen.

door

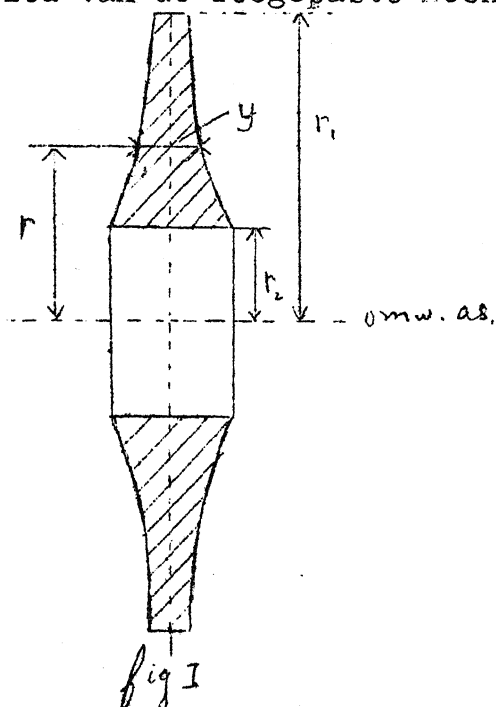
W.L. Esmeijer.

I. 1. In de praktijk gebeurt het vaak dat in de loop van de tijd gelijksoortige berekeningen regelmatig terugkeren; men denke b.v. aan het berekenen van de eigenfrequenties van torsietrillingen van motorinstallaties of aan het berekenen van de spanningen in turbineschijven.

Wanneer er in het probleem veel willekeurig te kiezen constanten voorkomen of willekeurig te kiezen functies, dan bestaat de taak van de theoreticus meestal hierin, dat hij het probleem zodanig bewerkt, dat hij komt tot een in details uitgewerkt rekenschema. De gebruiker van het schema (constructeur b.v.), voor wie de opgave slechts een van de vele detailvraagstukken is, behoeft zich niet meer te bekommeren om de finesses van de berekening; hij laat door een van zijn assistenten het schema doorrekenen en hij beoordeelt het resultaat.

Het is duidelijk dat een dergelijke werkverdeling zeer bevorderlijk is voor een efficiënte gang van zaken.

In het volgende zal een probleem van het bovengeschetste type uit het gebied van de Toegepaste Mechanica worden behandeld.

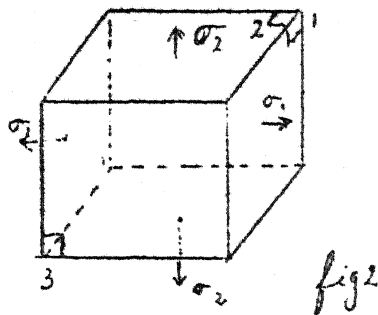


Gegeven is een homogeen, isotroop omwentelingslichaam waarvan in fig. 1 een meridiaandoorsnede is getekend. De dikte  $y$  van deze "schijf" is afhankelijk van  $r$ ;  $y$  is klein t.o.v.  $r_1$ .

Bij een gegeven begintemperatuur is de schijf spanningsloos. De schijf wordt nu verwarmd. Er stelt zich in een bekend onderstelde verdeling van de temperatuur  $T = T(r)$  waarin  $T$  voorstelt de toename van de temperatuur vanuit de begintoestand. De schijf wordt niet verhinderd uit te

te zetten. Gevraagd wordt naar de spanningsverdeling, die een gevolg is van deze verwarming.

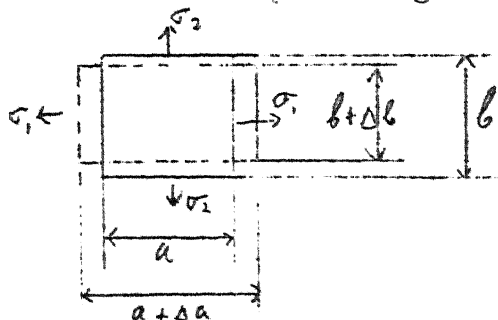
3. We zullen van de elasticiteitsleer datgene kort weergeven, dat we strikt nodig hebben bij onze afleiding.



We snijden een klein rechthoekig parallelipedum uit het materiaal. We ontbinden de kracht die op een zijvlak met opp.  $\Delta F$  wordt uitgeoefend in een kracht  $\Delta N$  loodrecht op het zijvlak en in een kracht  $\Delta D$  in het zijvlak. We definiëren  $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \sigma$  (normaalspanning op het beschouwde vlakke-elementje) en  $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{\Delta F} = \tau$  (Schuifspanning op het beschouwde vlakke-elementje).

We bekijken nu een blokje, zoals in fig. 2. Op vlakken 1 en 2 is alleen een normaalspanning, vlak 3 is spanningsloos. We nemen vlak 3 als vlak van tekening.

Wanneer het materiaal aan de wet van Hooke gehoorzaamt, dan vervormt het blokje op de volgende wijze.



$$\frac{\Delta a}{a} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} \left( \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 \right)$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \epsilon_2 = \frac{1}{E} \left( \sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1 \right)$$

$\epsilon$  wordt genoemd de specifieke verlenging;  $E$  en  $m$  zijn constanten (voor staal  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $m = 3,5$ ).

Om de gedachten te bepalen: een spanning  $\sigma = 2000 \text{ kg/cm}^2$  is voor staal reeds een hoge waarde;  $\epsilon < \frac{1}{1000}$  in het algemeen.

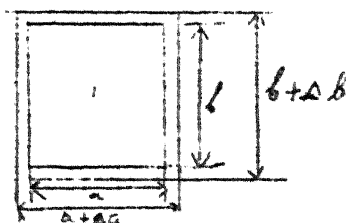
Krijgt het blokje een temperatuursverhoging  $T$  dan zal het uitzetten.

$$\frac{\Delta b}{b} = \alpha T$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \alpha T$$

$\alpha$  = lineaire uitzettingscoëff. (constant aangenomen).

Voor staal  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .



Volgens Neumann kunnen we aannemen dat bij het samengaan van bovenstaande 2 effecten geldt:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 \right\} + \alpha T \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1 \right\} + \alpha T \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

4. We gaan het vraagstuk behandelen met de benadering dat de vlakken loodrecht op de omwentelingsas spanningsloos zijn en dat de spannings-toestand alleen afhankelijk is van de  $r$  coördinaat (dus met name niet



afhankelijk van de coördinaat in de richting van de omwentelingsas).

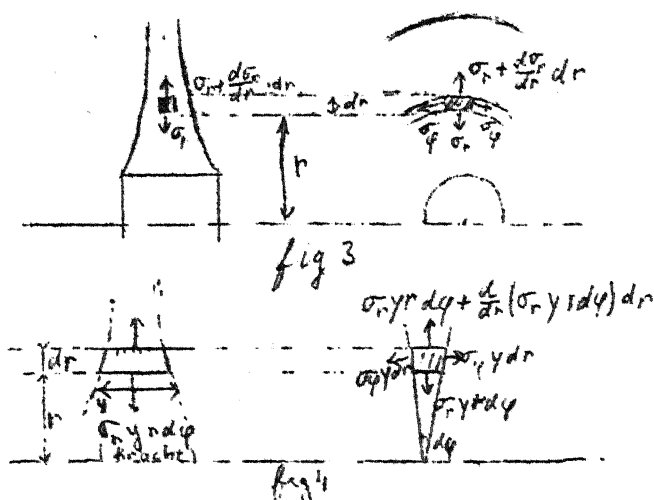
Op het in fig. 3 geschetste blokje blijven dan over de radiale spanning  $\sigma_r$  en de tangentiële spanning  $\sigma_\varphi$ .

We bezien het evenwicht in radiale richting van een stukje  $r \, d\varphi \cdot dr \cdot y$  uit de schijf

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot y r) dr \, d\varphi = \sigma_\varphi y \, dr \, d\varphi$$

$$\frac{r}{y} \frac{d(\sigma_r y)}{dr} + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (2)$$

Laat nu de verplaatsing zijn in radiale richting van een punt



op straal  $r$   $u = u(r)$  dan geldt

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

Met behulp van (1)

$$\left. \begin{aligned} E \left( \frac{du}{dr} - \alpha T \right) &= \sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_\varphi \quad (a) \\ E \left( \frac{u}{r} - \alpha T \right) &= \sigma_\varphi - \frac{1}{m} \sigma_r \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Uit (3) kunnen we  $u$  elimineren. (3b) gedifferentieerd geeft

$$\frac{E}{r} \left( \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = E \alpha \frac{dT}{dr} + \frac{\alpha \sigma_\varphi}{dr} - \frac{1}{m} \frac{d\sigma_r}{dr}$$

Hierin (3a) en (3b) substitueren.

$$r \left( \frac{d\sigma_r}{dr} - m \frac{d\sigma_\varphi}{dr} \right) + (m+1)(\sigma_r - \sigma_\varphi) = m E \alpha r \frac{dT}{dr} \quad (4)$$

Samen met

$$\frac{r}{y} \frac{d}{dr}(\sigma_r y) + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (2)$$

en de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} r=r_1 & \quad \text{dan} \quad \sigma_r = 0 \\ r=r_2 & \quad \text{"} \quad \sigma_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

is de opgave mathematisch volkomen vastgelegd. Door  $\sigma_\varphi$  te elimineren uit (4) en (2) ontstaat een gewone lineaire differentiaalvergelijking van de 2e orde voor  $\sigma_r$ ; (5) geeft de randvoorwaarden voor  $\sigma_r$ .

5. Een van de functies  $y = y(r)$  waarvoor een oplossing in expliciete vorm is te geven, is het in de praktijk voorkomende geval

$$y = \frac{c}{r^n} \quad (c \text{ en } n \text{ reëel}).$$

In de praktijk is  $n \geq 0$ .

(4) en (2) worden dan

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} - m r \frac{d\sigma_\varphi}{dr} + (m+1)(\sigma_r - \sigma_\varphi) = m E \alpha r \frac{dT}{dr} \quad (4)$$

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-n)\sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (2)^*$$

Elimineren we uit (4) en (2)\* de  $\sigma_\varphi$  dan ontstaat

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + (3-n)r \frac{d\sigma_r}{dr} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)n \sigma_r = -E \alpha r \frac{dT}{dr} \quad (6)$$

Om de gereduceerde vergelijking op te lossen stellen we  $\sigma_r = A r^\lambda$ .  $\lambda$  moet dan voldoen aan

$$\lambda(\lambda-1) + (3-n)\lambda - \left(1 + \frac{1}{m}\right)n = 0$$

Hieruit volgt

$$\lambda_{1,2} = \frac{n}{2} - 1 \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{n}{m} + 1} \quad (7)$$

Daar  $m = 3,5$  geeft dit altijd reële waarden voor  $\lambda_{1,2}$ .

De niet-gereduceerde vergelijking wordt opgelost met behulp van de methode der variaties van constanten.

Stel  $\sigma_r = A r^{\lambda_1} + B r^{\lambda_2}$  waarin A en B nog te bepalen functies zijn van r.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{dA}{dr} r^{\lambda_1} + \frac{dB}{dr} r^{\lambda_2} + A \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + B \lambda_2 r^{\lambda_2-1}$$

We leggen aan A en B de voorwaarde op

$$\frac{dA}{dr} r^{\lambda_1} + \frac{dB}{dr} r^{\lambda_2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} = A \lambda_1 (\lambda_1 - 1) r^{\lambda_1-2} + B \lambda_2 (\lambda_2 - 1) r^{\lambda_2-2} + \frac{dA}{dr} \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + \frac{dB}{dr} \lambda_2 r^{\lambda_2-1}$$

Wanneer we deze waarden van  $\sigma_r$ ,  $\frac{d\sigma_r}{dr}$  en  $\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2}$  substitueren in (6) en bedenken dat  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  wortels zijn van (7) dan vinden we

$$\frac{dA}{dr} \lambda_1 r^{\lambda_1+1} + \frac{dB}{dr} \lambda_2 r^{\lambda_2+1} = -E \alpha r \frac{dT}{dr} \quad (9)$$

Uit (9) en (7) volgt:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{dA}{dr} r^{\lambda_1+1} = -E \alpha r \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{E \alpha}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{\frac{dT}{dr}}{r^{\lambda_1}}$$

$$A = \frac{E \alpha}{\lambda_2 - \lambda_1} \int r^{-\lambda_1} \frac{dT}{dr} dr$$

B vinden we door  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  te verwisselen

$$B = \frac{E\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} \int r^{-\lambda_2} \frac{dT}{dr} dr$$

De oplossing van (6) wordt dan

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ r^{\lambda_1} \int r^{-\lambda_1} \frac{dT}{dr} dr - r^{\lambda_2} \int r^{-\lambda_2} \frac{dT}{dr} dr \right]$$

Na partiele integratie:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \lambda_1 r^{\lambda_1} \int \frac{T}{r^{\lambda_1+1}} dr - \lambda_2 r^{\lambda_2} \int \frac{T}{r^{\lambda_2+1}} dr \right] \quad (10)$$

Wanneer  $\lambda_1 = 0$  dan moet de term  $\lambda_1 r^{\lambda_1} \int \frac{T}{r^{\lambda_1+1}} dr$  vervangen worden door een constante; dit blijkt wanneer men de partiele integratie voor dit speciale geval nagaat.

In (10) zijn twee onafhankelijke integratieconstanten. Met behulp van (5) zijn deze in principe gemakkelijk te berekenen.

Uit (2)\* vindt men vervolgens  $\sigma_\varphi$ .

6. Heeft de schijf overal dezelfde dikte dan is n uit de vorige paragraaf gelijk aan nul.

We vinden dan  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$

$$\sigma_r = \frac{-E\alpha}{2} \left[ \bar{C}_1 + 2 \int \frac{rT dr}{r^2} \right] \quad (11)$$

Uit (2) volgt:

$$\sigma_\varphi = \frac{-E\alpha}{2} \left[ \bar{C}_1 - 2 \int \frac{rT dr}{r^2} + 2T \right] \quad (12)$$

(In (11) en (12) moeten de beide integralen  $\int rT dr$  genomen worden met dezelfde integratieconstante).

Omdat we er straks van gebruik moeten maken, werken we (11) en (12) uit voor het geval dat  $T$  lineair verandert met  $r$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Buitenstraal } r_i, \text{ temperatuur } T_i \\ \text{Binnenstraal } r_{i+1}, \text{ " } T_{i+1} \end{array} \right\} \Delta T_i = T_{i+1} - T_i$$

$$T = \frac{T_i r_{i+1} - T_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} + \frac{\Delta T_i}{r_{i+1} - r_i} r$$

We kunnen dus schrijven:

$$E\alpha T = \gamma_i + \beta_i r$$

waarin

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_i = E\alpha \frac{T_i r_{i+1} - T_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \\ \beta_i = E\alpha \frac{\Delta T_i}{r_{i+1} - r_i} \end{array} \right\} \quad (13)$$

(11) en (12) worden dan

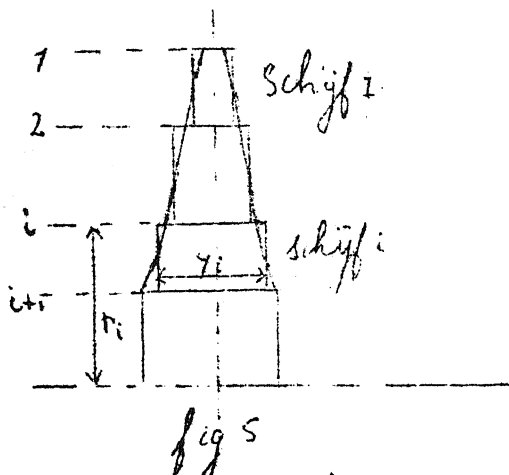
$$\sigma_r = \bar{C}_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \int r(\gamma_i + \beta_i r) dr$$

$$\sigma_\varphi = \bar{C}_1 - \frac{C_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int r(\gamma_i + \beta_i r) dr - \gamma_i - \beta_i r$$

Uitgewerkt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \frac{1}{3} \beta_i r &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_\varphi + \frac{2}{3} \beta_i r &= C_1 - \frac{C_2}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

7. Ten einde de spanningen te berekenen in een schijf waarbij  $y$  een gegeven willekeurige functie is van  $r$ , maken we gebruik van een gedachtengang die door Grammel is ontwikkeld bij het berekenen van de spanningen in roterende schijven.



We denken ons de schijf vervangen door een andere die is opgebouwd uit schijven  $i$ , elk van constante dikte  $y_i$  (fig. 5).

We vervangen de functie  $T = T(r)$  door een gebroken lineaire functie waarvan de knikken liggen op de plaatsen  $r_i$ . Voor elk van de schijven geldt (14). Zijn voor schijf  $i$  de  $\sigma_r$  en  $\sigma_\varphi$  bekend op straal  $r_i$ , dan zijn uit (14) te

berekenen  $C_1$  en  $C_2$  (voor schijf  $i$ ) en vervolgens  $\sigma_r$  en  $\sigma_\varphi$  op straal  $r_{i+1}$ .

Hierna zijn te berekenen van schijf  $i + 1$   $\sigma_r$  en  $\sigma_\varphi$  op straal  $r_{i+1}$  en wel uit de volgende overwegingen.

A.  $\sigma_\varphi$  moet continu zijn (men zie de evenwichtsvergelijking die aanleiding heeft gegeven tot vergelijking (2)).

B.  $\sigma_\varphi - \frac{1}{r} \sigma_r$  moet continu zijn (men merke op dat in het onderhavige geval  $T$  en  $u$  continu zijn en verwerke dat in (3)b).

Nu zijn voor schijf  $i + 1$  de  $\sigma_r$  en  $\sigma_\varphi$  bekend op straal  $r_{i+1}$ .

De berekening kan dus op dezelfde wijze worden voortgezet.

Een moeilijkheid is nog gelegen in het feit dat we de juiste start niet kunnen maken. Voor  $r = r_1$  is nl. alleen bekend  $\sigma_r = 0$ ;  $\sigma_\varphi$  is onbekend.

We starten nu op straal  $r = r_1$  met  $\sigma_r = 0$  en een willekeurig gekozen  $\sigma_\varphi^*$ .

Op straal  $r = r_n$  eindigen we met  $\sigma_r = \bar{\sigma}_r$  en  $\sigma_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi$ .

Mathematisch gesproken betekent het tot nu toe in § 7 besprokene dat we de lineaire vergelijkingen (2) en (4) benaderen door vergelijkingen met intervalsgewijze constante  $y$  en  $\frac{dT}{dr}$  en oplossen met de goede

beginvoorwaarde (op straal  $r_1$ ) voor  $\sigma_r$  ( $\sigma_r = 0$ ) en een aangenomen beginvoorwaarde voor  $\sigma_\varphi$  ( $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^*$ ).

We gaan vervolgens oplossen de gereduceerde vergelijkingen (2) en (4) (met dezelfde benadering) en voeren als randvoorwaarden in op de straal  $r = r_1$ :

$$\sigma_r = 0 \quad \text{en} \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^{**}$$

In de berekeningen betekent dit dat  $\beta_i$  uit vergelijking (14) nul gesteld moet worden.

Op straal  $r_n$  eindigen we met

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r \quad \text{en} \quad \sigma_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi$$

Een start met de beginvoorwaarden  $\sigma_r = 0$  en  $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^* + \sigma_\varphi^{**} \lambda$  geeft vanwege de lineariteit van de vergelijkingen voor  $r = r_n$

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r + \lambda \bar{\sigma}_r \quad \text{en} \quad \sigma_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi + \lambda \bar{\sigma}_\varphi.$$

Nu moet

$$\bar{\sigma}_r + \lambda \bar{\sigma}_r = 0 \quad \text{waaruit volgt}$$

$$\lambda = - \frac{\bar{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_\varphi}$$

Op de inrichting van het gedetailleerde rekenschema zullen we hier niet ingaan. Grammel heeft voor het zeer nauw verwante probleem van de spanningsberekening in roterende schijven een zeer elegant rekenschema opgesteld. Men zie hiervoor b.v. Biezeno-Grammel: "Technische Dynamik" Springer 1939.

II. 1. Bij het oplossen van mathematisch-fysische vraagstukken moet men er steeds op bedacht zijn dat een gedeeltelijk mathematische - gedeeltelijke fysische beschouwingswijze soms zeer eenvoudig tot belangrijke resultaten voert.

De bewijsvoering mag dan in zuivere mathematische zin niet geheel streng zijn, de theoreticus uit de praktijk mag er (op gepaste wijze) gebruik van maken.

In het volgende wordt een voorbeeld gegeven van een dergelijke beschouwingswijze.

2. Gegeven is een oneindig lange massieve onwentelingscylinder (fig. 6). Tot aan het tijdstip  $t = 0$  heeft de cylinder overal dezelfde constante temperatuur, hij is bovendien spanningsloos.

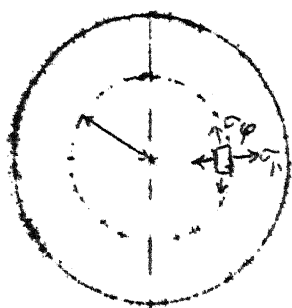
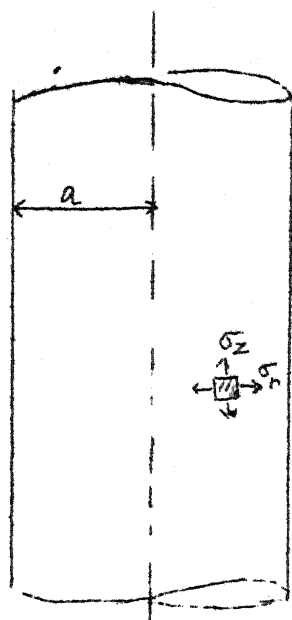


fig 6

Voor  $t \gg 0$  zal gelden:

$$r=a \text{ dan } T=V \begin{cases} V \text{ constant} \\ V > 0 \end{cases}$$

( $T$  zal weer voorstellen de toename van de temperatuur vanuit de begintoestand).

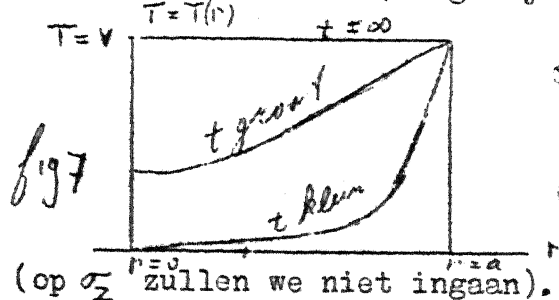
We vragen naar het verloop van de temperatuurspanningen als functie de tijd en in het bijzonder naar de grootst optredende spanning.

In een van de vorige voordrachten heeft Lauwerier het temperatuurverloop in de cylinder berekend. Fig. 7 geeft kwalitatief de resultaten.

We zullen de spanningsberekening uitvoeren met de veronderstelling dat op elk tijdstip het elastische probleem zich als statisch probleem laat behandelen.

De afleiding van de formules gaat geheel analoog aan de afleiding in I. We moeten hier echter niet invoeren  $\xi = 0$ , maar  $\xi = \text{constant}$ .

We vinden dan (vergelijk (11) en (12))



$$\sigma_r = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{E\alpha}{2} \left[ c_1 + \frac{2 \int r T dr}{r^2} \right] \quad (15)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{E\alpha}{2} \left[ c_1 - \frac{2 \int r T dr}{r^2} + 2T \right] \quad (16)$$

De randvoorwaarden luiden:

$$r = a \text{ dan } \sigma_r = 0$$

$$r = 0 \quad \sigma_r \text{ en } \sigma_\varphi \text{ eindig.}$$

(15) en (16) worden nu:

$$\sigma_r = \frac{m}{m-1} E\alpha \left\{ \frac{1}{a^2} \int_0^a \rho T d\rho - \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho T d\rho \right\} \quad (17)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{m}{m-1} E\alpha \left\{ -T + \frac{1}{a^2} \int_0^a \rho T d\rho + \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho T d\rho \right\} \quad (18)$$

Voor  $\sigma_r$  en  $\sigma_\varphi$  kunnen vervolgens reeksontwikkelingen worden gegeven.

We definiëren als "gemiddelde temperatuur van het deel van de cylinder dat binnen de straal  $r$  ligt":

$$(T_{gem})_r = \frac{\int_0^r T \cdot 2\pi \rho d\rho}{\pi r^2}$$

Met behulp van fig. 7 is van deze grootte gemakkelijker een indruk te krijgen.

(17) en (18) schrijven we als volgt:

$$\sigma_r = \frac{m}{m-1} E\alpha \cdot \left\{ \frac{(T_{gem})_a - (T_{gem})_n}{2} \right\}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{m}{m-1} E\alpha \left\{ -T + \frac{(T_{gem})_a + (T_{gem})_n}{2} \right\}$$

Hieruit en met behulp van fig. 7 is direct af te leiden dat  $|\sigma_\varphi|$  zijn maximum bereikt voor  $t = 0$  en  $r = a$

$$|\sigma_\varphi|_{max} = \frac{m E\alpha}{m-1} \quad \checkmark$$

$\sigma_r$  is kleiner dan  $|\sigma_\varphi|_{max}$

MATHEMATISCH CENTRUM,  
2de Boerhaavestraat 49,  
A m s t e r d a m - O .

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 15 Februari 1951.

Foutschattingen in de numerieke wiskunde.

door

A. van Wijngaarden.

Evenals in de zuivere wiskunde het existentiebewijs en het eenduidigheidsbewijs van de oplossing van een probleem onontbeerlijk zijn, zo is in de numerieke wiskunde bovendien nog de foutschatting noodzakelijk. Evenwel wordt ze slechts zelden uitgevoerd. Deels komt dit omdat men zich meestal laat leiden door intuïtie, deels omdat men niet op de hoogte is van de mogelijkheden daartoe ofwel omdat de mogelijkheid nog niet bestaat. In het volgende zullen wij iets vertellen over de schatting van de fout welke ontstaat bij de numerieke integratie van gewone differentiaalvergelijkingen. Daarbij zullen wij ons beperken tot een heel eenvoudig geval. De gevolgde methode kan echter zonder veel moeite tot andere gevallen worden uitgebreid.

Wij hebben eerst enkele hulpmiddelen nodig uit de differentierekening, het machtigste werktuig van de numerieke analyse. Een functie  $f(x)$ ,  $f$  en  $x$  reeel, wordt gedefinieerd door een stelsel basiswaarden  $f_i = f(x_i)$ , welke zij aanneemt op de basispunten  $x_i = x_0 + ih$ . Voor andere waarden van  $x$  behelpt men zich i.p.v.  $f(x)$  met een polynoom van de graad  $r$ , dat in  $r+1$  opvolgende basispunten  $x_i$  de waarden  $f_i$  aanneemt. Daarbij volgt men dan nog een bepaald systeem voor de keuze van deze  $r+1$  basispunten voor een gegeven  $x$ . In berekeningen met de hand uitgevoerd maakt men meestal gebruik van differenties. Wanneer men de notaties gebruikt volgens het hiernaaststaande schema, heeft men, bijvoorbeeld, de interpolatieformule van Newton, welke luidt, als men stelt:  $x = x_i + p h$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & x_{i-3} f_{i-3} \\
 & & & & & & \nabla f_{i-2} \\
 & & & & & & \nabla^2 f_{i-1} \\
 & & & & & & \nabla^3 f_i \\
 & & & & & & \nabla^2 f_i \\
 & & & & & & \nabla f_i \\
 & & & & & & f_i \\
 & & & & & & x_i
 \end{array}$$



$$f(x) = f_i + \binom{p}{1} \nabla f_i + \binom{p+1}{2} \nabla^2 f_i + \dots + \binom{p+r-1}{r} \nabla^r f_i + R_{r+1} = \sum_{s=0}^r \binom{p+s-1}{s} \nabla^s f_i + R_{r+1}. \quad (1,1)$$

Hierin is  $R_{r+1}$  de restterm, welke, als  $f(x)$   $n+1$ -maal differentieerbaar is, geschreven kan worden als:

$$R_{r+1} = \binom{p+r}{r+1} h^{r+1} f^{(r+1)}(\xi), \quad (1,2)$$

waarin  $\xi$  een of andere waarde in het segment  $(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-r}, x)$  is. Zij onderscheidt zich dus slechts van de term, die men zou verwachten in de reeks, doordat  $\nabla^{r+1} f_i$  vervangen is door  $h^{r+1} f^{(r+1)}(\xi)$ . Het is deze foutschatting, welke ons in staat stelt, ook in meer ingewikkelde problemen dan interpolatie een schatting van de gemaakte fout te leveren.

Zo is bijv.

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= h \int_0^1 f(x) dp = \\ &= h \sum_{s=0}^r \nabla^s f_i \frac{1}{s!} \int_0^1 p(p+1) \dots (p+s-1) dp + q_i \\ &= h \sum_{s=0}^r a_s \nabla^s f_i + q_i. \end{aligned} \quad (1,3)$$

Is  $F_{r+1}$  een majorant voor de absolute waarden van de  $r^{\text{de}}$  afgeleide, dus  $F_{r+1} \geq |f^{(r)}(x)|$ , voor alle beschouwde  $x$ -waarden, dan is ook

$$|q_i| \leq Q = h^{r+2} a_{r+1} F_{r+1}. \quad (1,4)$$

## 2. De integratiemethode van Adams.

Zij gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2,1)$$

waarin  $f(x, y)$   $r+1$ -maal partieel differentieerbaar is. De Lipschitz-constante  $K$  is als volgt gedefinieerd:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|. \quad (2,2)$$

Om (2,1) met een interval  $h$  te integreren kan men als volgt te werk gaan. Op een of andere wijze, bijv. met een reeksontwikkeling of door iteratie, bepaalt men behalve  $y_0$  nog  $r$ -beginwaarden van  $y$ , dus  $y_1, y_2, \dots, y_r$ . In werkelijkheid geven wij deze waarden natuurlijk slechts met een eindige nauwkeurigheid, zodat in werkelijkheid gegeven zijn benaderde waarden  $y'_0, y'_1, \dots, y'_r$ , waarvoor geldt:

$$|y'_i - y_i| \leq \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (2,3)$$

Met behulp van (1,3) onder verwaarlozing van de restterm  $q_i$ , kan nu een benaderde waarde  $y'_{r+1}$  voor  $y_{r+1}$  gevonden worden, enz. Men gebruikt dus:

$$y'_{i+1} = y'_i + h \sum_{s=0}^r a_s \nabla^s f'_i = y'_i + h \sum_{s=0}^r b_s f'_{i-s},$$

$$i = r+1, r+2, \dots, n-1. \quad (2,4)$$

waarin

$$b_s = (-1)^s \sum_{t=s}^r \binom{t}{s} a_t \quad (2,5)$$

en

$$f'_i = f(x_i, y'_i). \quad (2,6)$$

Dit is de methode van Adams.

Gevraagd wordt nu een bovengrens aan te geven voor de fout  $y'_i - y_i$ . Neemt men aan, dat afgezien van de onnauwkeurigheid van de beginwaarden, uitgedrukt door (2,3), geen afrondingsfouten verder optreden in de berekening (wat gewoonlijk over het hoofd wordt gezien), dan kan men inderdaad een grens aangeven, hetgeen wij zullen laten zien.

En passant merken wij op, dat de methode van Adams uit rekentechnisch oogpunt tamelijk inferieur is. Zij is echter buitengewoon eenvoudig en de foutendiscussie is ook eenvoudig.

### 3. De foutschatting van von Mises.

Ref.: R.v. Mises, Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen, ZAMM, 10, S. 81, (1930).

Uit het volgende volgt:

$$\varepsilon_{i+1} = y'_{i+1} - y_{i+1} = y'_i + h \sum_{s=0}^r b_s f'_{i-s} - y_i - h \sum_{s=0}^r b_s f_{i-s} - q_i,$$

dus

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + h \sum_{s=0}^r b_s (f'_{i-s} - f_{i-s}) - q_i. \quad (3,1)$$

Door te majoreren met behulp van (1,4) en (2,2) vinden wij

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq |\varepsilon_i| + hK \sum_{s=0}^r |b_s| |\varepsilon_{i-s}| + Q. \quad (3,2)$$

Iedere oplossing  $E_i$  van de corresponderende differentievergelijking

$$E_{i+1} = E_i + hK \sum_{s=0}^r |b_s| E_{i-s} + Q, \quad (3,3)$$

waarvoor geldt:

$$E_i \geq \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (3,4)$$

is dus een majorand voor  $|\varepsilon_i|$ . Een particuliereoplossing van (3,3) is

$$E_i = -\frac{Q}{hKB}, \quad B = \sum_{s=0}^r |b_s| = \sum_{t=0}^r 2^t a_t. \quad (3,5)$$

De karakteristieke vergelijking van (3,3)

$$z^{r+1} - z^r - hK \sum_{s=0}^r |b_s| z^{r-s} = 0 \quad (3,6)$$

heeft, zoals uit de tekens volgt, precies een positieve wortel  $z_0$ , welke bovendien groter dan 1 is. Dus is met willekeurige constante A

$$E_i = A z_0^i - \frac{Q}{hKB}$$

een oplossing van (3,3). Door te kiezen

$$A = \varepsilon + \frac{Q}{hKB}$$

is ( $z_0 > 1$ ) bovendien aan (3,4) voldaan. Dus is de gezochte bovengrens

$$|y_i' - y_i| \leq E_i = \varepsilon z_0^i + \frac{Q}{hKB} (z_0^i - 1), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3,7)$$

Om een zo scherp mogelijke schatting te verkrijgen, moet  $z_0$  uit (3,6) worden bepaald. Dit zou vereenvoudigd kunnen worden door voor enkele in aanmerking komende waarden van  $r$ , bijv. 1, 2, 3 en 4 met behulp van (3,6) een tabel te maken van  $hK$  als functie van  $z_0$  voor waarden van  $z_0$ , welke een weinig boven 1 liggen, bijv. van 1 tot 1.2. Bij voorgeschreven  $hK$  (de enige parameter van het speciale probleem, welke optreedt), kan dan  $z_0$  gemakkelijk worden afgelezen. Een ruwe benadering kan worden verkregen door voor  $z_0$  een majorand in te vullen. Klaarblijkelijk is

$$z_0 < 1 + hKB. \quad (3,8)$$

4. Een verscherpte fout-schatting.

Ref.: J. Weiszinger, Eine verschärfte Fehlerabschätzung zum Extrapolationsverfahren von Adams, ZAMM, 30, S. 356-363 (1950).

De schatting van von Mises, welke wij zo juist hebben afgeleid is buitengewoon grof. Men kan eigenlijk helemaal niet van een schatting spreken, doch slechts van een bovengrens, welke bijv. gebruikt kan worden om aan te tonen, dat door  $h$  klein genoeg te kiezen  $y'$  willekeurig dicht bij  $y$  gebracht kan worden (afgezien van de afrondingsfouten natuurlijk, die alles in de war sturen). De reden, waarom de schatting zo slecht is, is hierin gelegen, dat de  $b_s$  in (3,1) vervangen moesten worden door  $|b_s|$  in (3,2). Dit is heel erg. Immers, voor  $r = 4$  bijv. is  $b_0 = 2.6403$ ;  $b_1 = -3.8528$ ;  $b_2 = 3.6333$ ;  $b_3 = -1.7694$ ;  $b_4 = 0.3486$ . Dus is  $\sum b_s = 1$ , terwijl  $\sum |b_s| = 12,2444$ . Een heel eenvoudige methode om hier aan tegemoet te komen is gegeven door Weiszinger. Een sterk vereenvoudigde versie van zijn schatting, welke evenwel niet veel ruwer is, zullen wij hier behandelen.

De grondgedachte zullen wij behouden. Alvorens te majoreren van (3,1) op (3,2) tellen wij nl. een aantal opvolgende vergelijkingen (3,1) bij elkaar op, d.w.z. sommeren over  $i$  tot  $i-m$ . Dan volgt:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i-m} + h \sum_{s=0}^{m+r} c_s (f'_{i-s} - f_{i-s}) - \sum_{s=0}^m a_{i-s}, \quad (4,1)$$

waarin, als  $m > r$  is, geldt

$$\left. \begin{aligned} c_s &= b_0 + b_1 + \dots + b_s && \text{voor } 0 \leq s \leq r-1 \\ c_s &= 1 && \text{voor } r \leq s \leq m, \\ c_s &= b_{s-m} + b_{s-m+1} + \dots + b_r && \text{voor } m+1 \leq s \leq m+r. \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

Hierin is nu dus het wisselen van de tekens van  $b_s$  al flink tot zijn recht gekomen.

Nu majoreren wij weer, evenals bij von Mises tot:

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq |\varepsilon_{i-m}| + hK \sum_{s=0}^{m+r} |c_s| |\varepsilon_{i-s}| + (m+1)Q. \quad (4,3)$$

Een majorand van  $|\varepsilon_i|$  is dus iedere oplossing  $E_i$  van de vergelijking:

$$E_{i+1} = E_{i-m} + hK \sum_{s=0}^{m+r} |c_s| E_{i-s} + (m+1)Q, \quad (4,4)$$

welke voldoet aan

$$E_i \geq \varepsilon' \geq |\varepsilon_i|, \quad i = 0, 1, \dots, m+r. \quad (4,5)$$

Omdat  $i$  hier tot  $m+r$  loopt i.p.v. tot  $r$ , is  $\varepsilon' > \varepsilon$ . Wij gebruiken nu (3,7) en (3,8) om  $\varepsilon'$  te bepalen, dus:

$$\varepsilon' = \varepsilon(1+hKB)^{m+r} + \frac{Q}{hKB} \{ (1+hKB)^{m+r} - 1 \}. \quad (4,6)$$

In de uitvoerige theorie van Weiszinger blijken de exponenten  $m+r$  verlaagd te kunnen worden tot  $m$ , maar het zal straks blijken, dat dit niet van essentieel belang is. Het zou trouwens helemaal niet moeilijk zijn om  $\varepsilon'$  te drukken.

De karakteristieke vergelijking van (4,4),

$$z^{m+r+1} - z^r - Kh \sum_{s=0}^{m+r} |c_s| z^{m+r-s} = 0 \quad (4,7)$$

heeft weer een wortel  $z_m > 1$ , dus

$$E_i = A' z_m^i - \frac{(m+1)Q}{hKC}, \quad C = \sum_{s=0}^{m+r} |c_s| \quad (4,8)$$

is een oplossing van (4,4). Door de keuze

$$A' = \varepsilon' + \frac{(m+1)Q}{hKC} \quad (4,9)$$

wordt ook aan (4,5) voldaan. We krijgen nu dus de schatting:

$$|y_i' - y_i| \leq E_i = \varepsilon' z_m^i + \frac{(m+1)Q}{hKC} (z_m^i - 1). \quad (4,10)$$

Zo op het oog schijnt (4,10) niet veel beter dan (3,7), maar de clou is, dat de wortel  $z_m$  veel dichterbij 1 ligt dan  $z_0$ .

### 5. Een voorbeeld en bezinning.

Von Mises illustreerde de theorie aan een voorbeeld, nl. de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \quad y(0) = 1,$$

waarvan de exacte oplossing gegeven wordt door

$$\ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{x}{y}.$$

Kiezen wij  $r = 4$ ,  $h = 0.02$  en  $0 \leq x \leq 2.00$ , dus 100 stappen, dan vindt men  $F_5 = 8840$ ,  $Q = 1.865 \times 10^{-7}$  en  $Kh = 0.006$ . Ten slotte nemen wij aan, dat de berekening uitgevoerd in 6 decimalen, dus dat  $\varepsilon = 5 \times 10^{-7}$ .

Met deze gegevens vindt von Mises  $|\varepsilon_{100}| \leq 1990 \times 10^{-6}$  en Weiszinger  $45 \times 10^{-6}$ . Onze vereenvoudiging brengt onze schatting op  $50 \times 10^{-6}$ . Een schatting van A. Fricke leverde  $25 \times 10^{-6}$ , maar de theorie ervan is jammer genoeg fout, dus deze telt niet mee.

Geen van de genoemde auteurs heeft de moeite genomen om nu de integratie ook eens uit te voeren met deze gegevens om te zien, wat er nu werkelijk voor een fout uitkomt. Von Mises deed 10 stappen van de 100 en constateerde nog geen fout. Whittaker and Robinson demonsteren wel het grootste gebrek aan fantasie door deze berekening als voorbeeld in hun boek over te nemen (zonder verwijzing). Voert men het proces uit, dan blijkt in werkelijkheid  $\varepsilon_{100} 69 \times 10^{-6}$  te bedragen. Dit lijkt misschien merkwaardig, maar is eenvoudig te verklaren. Zowel  $(3,7)$  als  $(4,10)$  vertonen een tweeterm. De eerste term is ontstaan door de afronding van de begingegevens en is evenredig met de rekenprecisie. De tweede term ontstaat door de resttermfout bij de integratie. Bij Weiszinger zijn de termen resp.  $8 \times 10^{-6}$  en  $37 \times 10^{-6}$ . Bij onze ruwere schatting  $14 \times 10^{-6}$  en  $36 \times 10^{-6}$ . In dit speciale voorbeeld is dus de resttermfout van dezelfde orde van grootte als de afrondingsfout. Maar deze afrondingsfout, zoals hier in rekening gebracht is slechts een fractie van de werkelijke afrondingsfouten in de berekening, omdat bij iedere stap wordt afgerond. Aan dit voorbeeld zien wij dus duidelijk het belang van de theorie van de afrondingsfouten, welke aanzienlijk moeilijker is dan die van stelselmatige fouten.

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht te houden door Prof. Dr J.E. Verschaffelt  
op 1 Maart in het Mathematisch Centrum over:

"De thermomechanica der transportverschijnselen".

In de thermomechanica geeft men de naam van transportverschijnselen aan processen, waarbij energie van een plek in de ruimte naar een andere overgaat. Deze overgang geschiedt onafhankelijk van elke verplaatsing van materie (warmtestraling en warmtegeleiding), ofwel hij is aan beweging van materie gebonden, doordat energie met de materie wordt vervoerd (vloeistofstroming, diffusie, elektrische stromen).

Het thermomechanisch onderzoek dier verschijnselen is het onderwerp geweest van vele verhandelingen (Meixner, Prigogine, Casimir, de Groot), gegrond op de ideeën van Onsager. Een daarvan onafhankelijke theorie werd door mij ontwikkeld in een reeks mededelingen aan de Koninklijke Belgische Academie van Wetenschappen; zij berust op een beginsel, dat ik het superpositiebeginsel heb genoemd, en volgens hetwelk de bij een samengesteld onomkeerbaar proces gedissipeerde energie de som is der energieën, welke gedissipeerd worden bij de elementaire processen, waarin het samengestelde proces kan worden ontleed.

De door mij gevolgde methode van onderzoek is deze, dat men van de ruimte waardoor een fluide mengsel stroomt, een vaststaand volume-element in het oog neemt, en daarop de twee hoofdwetten, de energiewet en de entropiewet toepast, en wel in deze vorm:

1<sup>o</sup> (zie verg.(1)) de toename der totale energie (inwendige en makrokinetische) is gelijk aan de toegevoerde warmte (het warmteeffect van het proces), vermeerderd met de door de materiële stromingen achtergelaten energie (het toevoereffect) en verminderd met den verrichten uitwendigen arbeid (het mechanisch effect);

2<sup>o</sup> (verg.(2)) de toename der entropie is gelijk aan de van buiten af toegevoerde entropie (entropietoevoer), vermeerderd met de entropie, welke plaatselijk ontwikkeld wordt (entropiegeneratie) door de onomkeerbare processen, die in het beschouwde volumeelement plaats hebben. Het is deze plaatselijk gegenereerde entropie, welke na vermenigvuldiging met de (absolute) temperatuur de gedissipeerde energie oplevert.

Door eliminatie van het warmteeffect tussen de twee aldus verkregen vergelijkingen bekomt men een derde (verg.(3)), welke nu nog drie nader te bepalen grootheden bevat, nl. het mechanisch effect, de gedis-

sipeerde energie en de makrokinetische energie. Die verg.(3) wordt eerst nog getransformeerd (verg.(4)) door ontbinding der absolute stromingssnelheden van de bestanddelen van het fluide mengsel in een gemeenschappelijke snelheid van het mengsel als geheel en een relatieve diffusiesnelheid.

In die gevallen, waar de uitwendige arbeid en de dynamische bewegingsvergelijking bekend zijn (enkelvoudig fluidum b.v.) kan de gedissipeerde energie exact berekend worden. In 't algemeen echter moeten hypothesen worden ingevoerd. Deze betreffen

1<sup>o</sup> den uitwendigen arbeid (verg.(5)),

2<sup>o</sup> de gedissipeerde energie (verg.(6) ; toepassing van het superpositiebeginsel).

Daaruit volgt dat de kinetische energie (verg.(7)), waaruit de dynamische vergelijkingen van de componenten (8) en van het geheel (9) kunnen worden afgeleid.

De gedissipeerde energie heeft den vorm van een som van scalaire producten van twee vectoren, de ene zijnde een stromingsintensiteit, de tweede de daaraan toegevoegde affiniteit.

In den stationairen toestand (toestand onveranderlijk met den tijd) wordt evenredigheid aangenomen tussen stromingsintensiteit en de toegevoegde affiniteit. Daardoor gaat (6) in (10) over.

De vergelijkingen (11) en (12) geven uitdrukkingen voor de kracht die op de eenheid van massa werkt ( $\mu_v=1$  wanneer de eenheid van massa de gram is,  $\mu_v=M_v$  als zij een mol is).

In verg.(13) wordt een uitdrukking gegeven voor het warmteeffect in den stationairen toestand; deze wordt verkregen door substitutie van (6) in (2).



$$(1) \quad \frac{\partial(cU')}{\partial t} + \frac{\partial(cK')}{\partial t} = Q - \sum \operatorname{div} (U'_V m_V) - \sum \operatorname{div} (K'_V m_V) - cL'$$

$$m_V = c_V u_V, \quad c = \sum c_V, \quad cU' = \sum c_V U'_V, \quad cK' = \sum c_V K'_V, \quad K'_V = \frac{1}{2} \mu_V u_V^2$$

$$Q = q - \operatorname{div} w, \quad w = kA_{th}, \quad A_{th} = -\operatorname{grad} \log T$$

$$(2) \quad T \frac{\partial(cS')}{\partial t} = T \left\{ \frac{q}{T} - \operatorname{div} \left( \frac{W}{T} \right) - \sum \operatorname{div} (S'_V m_V) + \frac{q'}{T} \right\} =$$

$$= Q - (w \cdot A_{th}) - T \sum \operatorname{div} (S'_V m_V) + \dot{q}'$$

$$W' = U' + pV', \quad W'_V = U'_V + j'_V, \quad G' = W' - TS', \quad G'_V = W'_V - TS'_V,$$

$$\frac{\partial c_V}{\partial t} = -\operatorname{div} m_V, \quad \sum c_V (dG'_V)_{Tp} = 0$$

$$(3) \quad cL' + q' + \sum c_V \frac{dK'_V}{dt} = (w \cdot A_{th}) - \sum (m_V \cdot \operatorname{grad}_{Tp} G'_V) - \sum \frac{1}{c} (m_V \cdot \operatorname{grad} p) +$$

$$+ \sum \operatorname{div} (j'_V m_V)$$

$$u_V = u + u'_V, \quad m = cu = \sum c_V u_V = \sum m_V, \quad m_V = x_V m + m'_V, \quad x_V = c_V / c, \quad \sum m'_V = 0$$

$$(4) \quad cL' + q' + \sum c_V \frac{dK'_V}{dt} = (w \cdot A_{th}) - \frac{1}{c} (m \cdot \operatorname{grad} p) + \operatorname{div} (pu) -$$

$$- \sum (m'_V \cdot \operatorname{grad}_{Tp} G'_V) + \sum \operatorname{div} (j'_V m'_V)$$

$$(5) \quad cL' = -\sum (m_V \cdot f'_V) + \sum \operatorname{div} (j'_V m_V) + \sum (m_V \cdot R'_V) + cL'_j = \sum c_V R'_V = 0$$

$$= -(m \cdot f') + \operatorname{div} (pu) - \sum (m'_V \cdot f'_V) + \sum \operatorname{div} (j'_V m'_V) + \sum (m'_V \cdot R'_V) + cL'_j$$

$$(6) \quad q' = (w \cdot A_{th}) + \sum (m_V \cdot A_V) = (w \cdot A_{th}) + (m \cdot A) + \sum (m'_V \cdot A'_V)$$

$$A_V = A + A'_V, \quad A'_V = f'_V - f' - \operatorname{grad}_{Tp} G'_V, \quad cf' = \sum c_V f'_V, \quad \sum c_V A'_V = 0$$

$$(7) \quad \sum c_V \frac{dK'_V}{dt} = \sum \mu_V (m_V \cdot \frac{du_V}{dt}) = (m \cdot f') - \frac{1}{c} (m \cdot \operatorname{grad} p) - \sum (m_V \cdot R'_V) -$$

$$-(m \cdot A) - cL'_j$$

$$-cL'_j = (m \cdot A_g), \quad A = A'' + A_g, \quad A'' = \operatorname{Div} p_{ij} - \operatorname{grad} p, \quad R'_V = f'_V - f'_V + Z'_V,$$

$$\sum c_V Z'_V = 0$$

$$(8) \quad \mu \frac{du_V}{v dt} = f'_V - \frac{1}{c} \operatorname{grad} p - A'' - Z'_V = f'_V - \frac{1}{c} \operatorname{Div} p_{ij} - Z'_V$$

$$(9) \quad \mu c \frac{du}{dt} = \sum \mu_V c \frac{du_V}{v dt} - \sum \operatorname{Div} \mu_{V V_1} c u'_V u'_{V_1} = cf' - \operatorname{Div} p_Y - \sum \operatorname{Div} \mu_{V V_1} c u'_V u'_{V_1}$$

$$m = aA, \quad m'_V = a_V A'_V, \quad m_V = a_V A_V, \quad a = \alpha c, \quad a_V = \alpha c_V$$

$$(10) \quad q' = kA_{th}^2 + \sum a_V A_V^2 = kA_{th}^2 + aA^2 + \sum a_V A_V^2$$

$$(11) \quad f'_V = \mu_V g + \mu_V \beta_V A_{th} + \frac{1}{2} \mu_V \sigma_V \text{grad } I^2 - e_V \text{grad } V \quad \sum c_V e_V = 0$$

$$(12) \quad f' = \mu g + \mu \beta A_{th} + \frac{1}{2} \mu \sigma \text{grad } I^2 \quad \sum x_V \mu_V = \mu$$

$$(13) \quad Q = -aA^2 - \sum a_V A_V'^2 + T \sum (m_V \text{grad } S_V') =$$

$$= -aA^2 + C_p'(m \text{grad } T) + l_p(m \text{grad } p) - \sum a_V A_V'^2 + T \sum \frac{\lambda S_V'}{\theta T} (m_V' \text{grad } T) +$$

$$+ T \sum (m_V' \text{grad } T \cdot S_V').$$

Colloquim:

Mathematische problemen uit de praktijk.

voordracht op 15 Maart 1951.

Trillingen van vliegtuigvleugels.

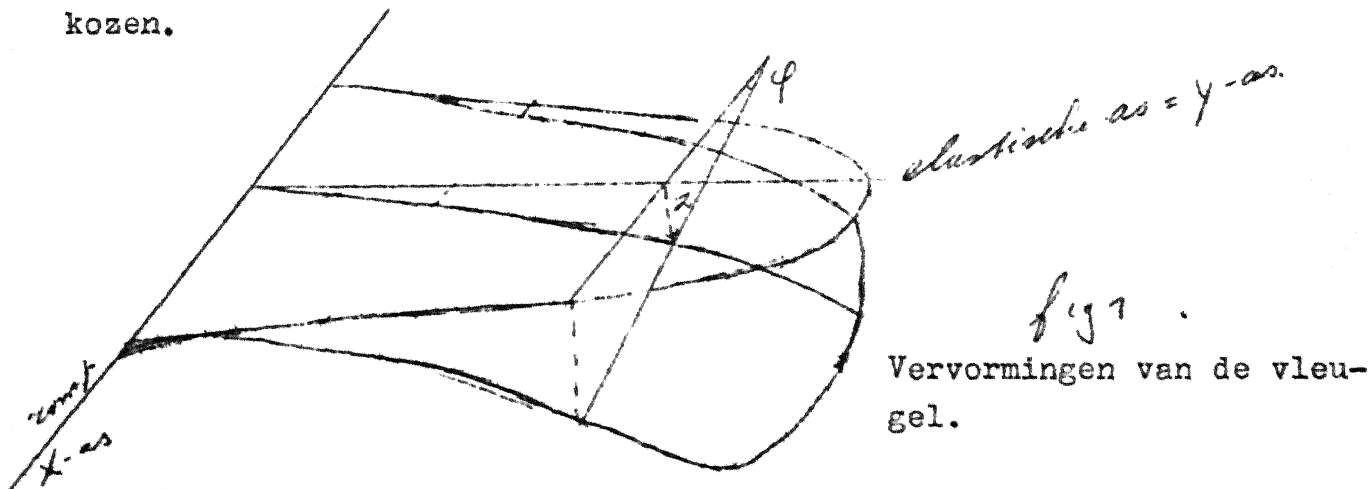
door

Ir A.J. van de Vooren.

1. Probleemstelling.

Vleugels en staartvlakken van vliegtuigen moeten op zodanige wijze geconstrueerd zijn, dat er bij geen enkele bereikbare snelheid zg. instabiele trillingen, die tot breuk zouden leiden, kunnen ontstaan. Om dus tot doelmatige constructies te komen, moeten we beschikken over methoden om deze trillingen te berekenen. We zullen ons hierbij beperken tot de berekening van het overgangsgeval tussen stabiele en instabiele trillingen, dus tot de harmonische trillingen. De trillingen komen tot stand onder invloed van elastische krachten, traagheidskrachten en aerodynamische krachten.

In fig.1 is de vleugel schematisch weergegeven. De X-as (d.w.z. de romp) vormt een vaste inklemming. De vleugel kan loodrecht op zijn eigen vlak buigen en kan torderen om de Y-as, maar de koorden (dat zijn lijnen evenwijdig aan de X-as) blijven rechte lijnen. Bovendien zullen we veronderstellen dat er een rechte elastische as loodrecht op de X-as, bestaat. De elastische as is gedefinieerd door de eigenschap, dat de vleugel bij belasting met krachten in de elastische as, alleen buigt, maar niet tordeert. Als Y-as wordt de elastische as gekozen.



Als buiging wordt nu gedefinieerd de verticale verplaatsing  $z$  van punten van de elastische as, terwijl onder torsie de hoekverdraaiing  $\varphi$  van de koorden om de elastische as wordt verstaan. Buiging en torsie zijn dus functies van  $y$ .

## 2. Afleiding der bewegingsvergelijkingen uit de variatiestelling van Hamilton.

We veronderstellen eerst dat het draagvlak geen voorwaartse snelheid bezit, zodat er ook geen luchtkrachten zijn (standtrilling). In dit geval is het systeem conservatief en de stelling van Hamilton luidt dan

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (1)$$

waarbij  $T$  de kinetische energie is en  $V$  de potentiële energie. Deze stelling drukt uit, dat de werkelijke oplossing  $z(y,t)$ ,  $\varphi(y,t)$  de integraal stationnair maakt, vergeleken met naburige functies  $z(y,t) + \delta z(y,t)$ ,  $\varphi(y,t) + \delta \varphi(y,t)$ , waarbij tot de vergelijking zijn toege-  
laten alle zodanige functies  $\delta z$  en  $\delta \varphi$  die voldoende continu en continu differentieerbaar zijn opdat  $T$  en  $V$  bestaan en die bovendien identiek gelijk aan 0 zijn voor  $t = t_0$  en  $t = t_1$ . De tijden  $t = t_0$  en  $t = t_1$  mogen willekeurig worden gekozen.

Voor niet-conservatieve systemen kan (1) worden gegeneraliseerd tot

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0, \quad (2)$$

waarbij  $\delta W$  de arbeid is, die de niet-conservatieve krachten, dat zijn dus hier de luchtkrachten, leveren tengevolge van de virtuele verplaatsingen  $\delta z$  en  $\delta \varphi$ .

De kinetische energie van de vleugel is

$$T = \frac{1}{2} \int_0^b [m(\dot{z} + s\dot{\varphi})^2 + I\dot{\varphi}^2] dy$$

waarbij  $m \Delta y$  en  $I \Delta y$  resp. de massa en het traagheidsmoment van een strookje  $\Delta y$  van de vleugel voorstellen. Het traagheidsmoment is hierbij genomen om een lijn evenwijdig aan de  $Y$ -as, die door het zwaartepunt van het strookje gaat. Het zwaartepunt ligt een afstand  $s$  achter de elastische as. De vleugel strekt zich uit van  $y = 0$  tot  $y = b$ . We kunnen ook schrijven

$$T = \frac{1}{2} \int_0^b (m_{11}\dot{z}^2 + 2m_{12}\dot{z}\dot{\varphi} + m_{22}\dot{\varphi}^2) dy. \quad (3)$$

Daar de mate van buiging wordt voorgesteld door  $z''$  en de mate van torsie door  $\varphi'$  (een accent duidt een differentiatie naar  $y$  aan), kan de potentiële energie in de vorm

$$V = \frac{1}{2} \int_0^b B z''^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^b T \varphi'^2 dy \quad (4)$$

worden geschreven, waarbij de buigstijfheid  $B$  en de torsiestijfheid  $T$  van de vleugelconstructie afhankelijk zijn. Deze uitdrukking geldt indien de vleugel, wat zijn elastische eigenschappen betreft, door een balk mag worden vervangen (daarbij blijven loodrechte doorsneden onvervormd).

Toepassing van de stelling van Hamilton levert voor de standtrilling

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} d(\delta z) + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} d(\delta \varphi) \right\} =$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) \delta z + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi \right\} dt,$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} V dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial V}{\partial z''} \delta z'' + \frac{\partial V}{\partial \varphi'} \delta \varphi' \right) dt.$$

Door partiele integratie

$$\frac{\partial V}{\partial z''} \delta z'' = \int_0^b B z'' \delta z'' dy = B z'' \delta z' \Big|_0^b - (B z'')' \delta z \Big|_0^b + \int_0^b (B z'')'' \delta z dy,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi'} \delta \varphi' = \int_0^b T \varphi' \delta \varphi' dy = T \varphi' \delta \varphi \Big|_0^b - \int_0^b (T \varphi')' \delta \varphi dy.$$

Omdat het interval van  $t_0$  tot  $t_1$  volkomen willekeurig is, leidt verg. (1) tot

$$- \int_0^b (m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi}) \delta z dy + \int_0^b (m_{12} \ddot{z} + m_{22} \ddot{\varphi}) \delta \varphi dy - B z'' \delta z' \Big|_0^b + (B z'')' \delta z \Big|_0^b -$$

$$- \int_0^b (B z'')'' \delta z dy - T \varphi' \delta \varphi \Big|_0^b + \int_0^b (T \varphi')' \delta \varphi dy = 0$$

Daar tevens  $\delta z$  en  $\delta \varphi$  willekeurig zijn, geldt volgens de fundamentele stelling der variatierekening, dat

$$\begin{cases} m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi} + (B z'')'' = 0 \\ m_{12} \ddot{z} + m_{22} \ddot{\varphi} + (T \varphi')' = 0 \end{cases} \quad (5)$$

terwijl aan de randen geldt

$$B z'' \delta z' = 0, \quad (B z'')' \delta z = 0 \quad \text{en} \quad T \varphi' \delta \varphi = 0$$

De vaste inklemming aan de romp levert de geometrische randvoorwaarden

$$y = 0 : \quad z = 0, \quad z' = 0, \quad \varphi = 0, \quad (6)$$

terwijl aan de vrije randen de dynamische randvoorwaarden

$$y = b : \quad B z'' = 0, \quad (B z'')' = 0, \quad T \varphi' = 0 \quad (7)$$

bevredigd moeten zijn.

Om de bewegingsvergelijkingen van de in een luchtstroom geplaatste vleugel te krijgen, moet ook  $\delta W$  worden bepaald.

Indien  $K_L$  en  $M_L$  resp. de extra-kracht en het extra-moment (om de Y-as) zijn, werkzaam tengevolge van de luchtstroming op een strookje van de vleugel, dan is

$$\delta W = \int_0^b K_L \delta z dy + \int_0^b M_L \delta \varphi dy.$$

In dit geval worden de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi} + (B z'')'' = K_L \\ m_{12} \ddot{z} + m_{22} \ddot{\varphi} + (T \varphi')' = M_L \end{cases} \quad (8)$$

Beperken we ons tot harmonische trillingen (frequentie  $\nu$ ), dan is

$$z = z_0 e^{i \nu t}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i \nu t}, \quad (z_0 \text{ en } \varphi_0 \text{ complex})$$

waarbij alleen fysische betekenis toekomt aan bv. het reële gedeelte. Evenals voor harmonische trillingen geldt voor de luchtkrachten

$$K_L = \nu^2 m_L (a_{11} z + a_{12} c \varphi), \quad M_L = \nu^2 m_L (a_{21} c z + a_{22} c^2 \varphi), \quad \text{met } m_L = \frac{1}{4} \pi \rho c^2.$$

Hierin is  $c$  de koorde,  $\rho$  de luchtdichtheid, terwijl  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  en  $a_{22}$  dimensieloze, complexe grootheden zijn, afhankelijk van enige kentallen, nl. de gereduceerde snelheid  $V = \frac{V}{\sqrt{\rho c}}$ , het getal van Mach en het getal van Reynolds. De luchtkrachten vormen een niet-conservatief stelsel, omdat  $a_{12} \neq a_{21}$ .

De bewegingsvergelijkingen zijn ook te schrijven als

$$(Bx'')' = \nu^2 (m_{11}x + m_{12}\varphi) + \nu^2 m_L (a_{11}x + a_{12}c\varphi),$$

$$-(T\varphi')' = \nu^2 (m_{12}x + m_{22}\varphi) + \nu^2 m_L (a_{21}cx + a_{22}c^2\varphi).$$

Voert men nu de matrixschrijfwijze in door te stellen

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dy^2} (B \frac{d^2}{dy^2}) & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dy} (T \frac{d}{dy}) \end{pmatrix}, \quad \underline{m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}c \\ a_{21}c & a_{22}c^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$$

en is verder  $\underline{u} = \underline{m} + \underline{m}_L \underline{a}$ , dan kunnen de bewegingsvergelijkingen ook worden geschreven als

$$\underline{e} \underline{f} = \nu^2 \underline{u} \underline{f} \quad (9)$$

met de bijbehorende randvoorwaarden (6) en (7). Verg. (9) is zeer algemeen en geldt bij geschikte generalisering van de matrices ook voor vleugels met roeren, enz.

### 3. Zelf-geadjungeerde en niet zelf-geadjungeerde eigenwaardeproblemen.

Het eigenwaardeprobleem (9) met bijbehorende randvoorwaarden (6) en (7) wordt zelf-geadjungeerd genoemd, indien voldaan is aan de beide voorwaarden

$$\int_0^b (\underline{t}_1' \underline{e} \underline{t}_2 - \underline{t}_2' \underline{e}^* \underline{t}_1) dy = 0,$$

$$\int_0^b (\underline{t}_1' \underline{u} \underline{t}_2 - \underline{t}_2' \underline{u}^* \underline{t}_1) dy = 0, \quad (10)$$

waarbij  $\underline{t}_1$  en  $\underline{t}_2$  vectoren zijn, die de randvoorwaarden bevredigen, maar overigens willekeurig zijn. Het teken  $*$  betekent, dat de toegevoegd complexe matrix moet worden genomen, terwijl een accent (bij een matrix) de getransponeerde voorstelt (de getransponeerde van een kolomvector is een rijvector).

Met

$$\underline{t}_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{t}_2 = \begin{pmatrix} z_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

kan, met behulp van partiele integratie, waarbij de stukken tussen de grenzen wegvallen vanwege de randvoorwaarden, aangetoond worden dat

$$\int_0^b \underline{t}_1' \underline{e} \underline{t}_2 dy = \int_0^b (B \frac{d^2 x_1}{dy^2} \cdot \frac{d^2 x_2}{dy^2} + T \frac{d\varphi_1}{dy} \cdot \frac{d\varphi_2}{dy}) dy. \quad (10a)$$

Daar  $\underline{e}^*$  en  $\underline{e}$  identiek zijn, levert  $\int_0^b \underline{t}_2' \underline{e}^* \underline{t}_1 dy$  hetzelfde op, zodat aan de eerste voorwaarde (10) voldaan is.

Bij volkomen willekeurige matrices geldt altijd

$$\underline{t}_1' \underline{u} \underline{t}_2 = \underline{t}_2' \underline{u}' \underline{t}_1. \quad (10b)$$

Dus zal aan de 2<sup>de</sup> voorwaarde (10) voldaan zijn, indien

$$\underline{u}^* \equiv \underline{u}', \quad (11)$$

d.w.z. indien  $\underline{u}$  een Hermite'se matrix is. Vanwege de willekeur in de vectoren  $\underline{t}$  is (11) ook noodzakelijk.

Voor de standtrilling is het eigenwaardeprobleem zelf-geadjungeerd.

omdat dan  $\underline{u}$  gelijk wordt aan de reële, symmetrische massamatrix  $\underline{m}$ . Bovendien is in dit geval het eigenwaardeprobleem positief definit, omdat voor iedere vector  $\underline{t}$ , die aan de randvoorwaarden voldoet, geldt dat  $\int_0^b \underline{t}' \underline{e} \underline{t} dy > 0$  en  $\int_0^b \underline{t}' \underline{m} \underline{t} dy > 0$ .

(Deze uitdrukkingen zijn resp. gelijk aan de potentiële en de kinetische energie, hetgeen beide positief definite vormen zijn).

Een positief definit eigenwaardeprobleem heeft positieve, reële eigenwaarden. Dus zijn voor de standtrilling alle eigenfrequenties positief reëel (harmonische trilling) en alle trillingsvormen reëel (alle trillende punten in phase of in tegenphase), wanneer tenminste van de damping wordt afgezien.

Voor de in een luchtstroom geplaatste vleugel is  $\underline{u}$  geen Hermite'se matrix. In dit geval is het eigenwaardeprobleem dus niet zelf-geadjungeerd, waardoor het a priori niet eens vast staat, dat er überhaupt eigenwaarden zijn. Dat het hier beschouwde probleem wel eigenwaarden heeft, kan het best worden aangetoond met een reeds van Hilbert afkomstige methode, gebaseerd op het eigenwaardeprobleem in integraalvorm.

#### 4. Het eigenwaardeprobleem in integraalvorm.

Voor de afleiding van de integraalvergelijkingen zullen we terugkeren tot het systeem van de buigende en torderende vleugel, waarvoor we als bewegingsvergelijkingen hebben verkregen

$$\begin{aligned} (Bz'')'' &= \nu^2 L_1, & (T\varphi')' &= -\nu^2 L_2 \\ \text{met } L_1 &= u_{11}z + u_{12}\varphi, & L_2 &= u_{21}z + u_{22}\varphi \end{aligned} \quad (12)$$

Wordt de 1<sup>ste</sup> verg. 2x tussen de grenzen  $y$  en  $b$  geïntegreerd en de 2<sup>de</sup> verg. 1x, dan is onder gebruikmaking van de randvoorwaarden (7)

$$\begin{aligned} Bz'' &= \nu^2 M_1, & T\varphi' &= \nu^2 M_2 \\ \text{met } M_1 &= \int_y^b (\eta - y) L_1 d\eta, & M_2 &= \int_y^b L_2 d\eta \end{aligned} \quad (13)$$

Terwijl  $\nu^2 L_1 \Delta y$  en  $\nu^2 L_2 \Delta y$  resp. de kracht en het moment (om de Y-as) op een strookje  $\Delta y$  voorstellen, afkomstig van traagheidskrachten + luchtkrachten, zijn  $\nu^2 M_1$  en  $\nu^2 M_2$  resp. het buigende moment (om de koerderichting) en het torderende moment, werkzaam in de doorsnede loodrecht op de Y-as ter plaatse  $y$ .

Integreren we nu de 1<sup>ste</sup> verg. (13) 2x tussen de grenzen 0 en  $y$  en de 2<sup>de</sup> verg. 1x tussen dezelfde grenzen (na deling resp. door  $B$  en  $T$ ), dan wordt met de randvoorwaarden (6):

$$z = \nu^2 \int_0^y (y - \eta) \frac{M_1}{B} d\eta, \quad \varphi = \nu^2 \int_0^y \frac{M_2}{T} d\eta,$$

ofwel, na substitutie van (13):

$$z = \nu^2 \int_0^y \int_y^b \frac{(y - \eta)(\eta - \gamma)}{B(\gamma)} L_1(\eta) d\eta d\gamma, \quad \varphi = \nu^2 \int_0^y \int_y^b \frac{L_2(\eta)}{T(\gamma)} d\eta d\gamma,$$

waarbij eerst moet worden geïntegreerd over  $\eta$  van  $y$ , tot  $b$  en daarna over  $\gamma$ , van 0 tot  $y$  (zie fig. 2). Verwisselt men de integratievolg-

orde, dan moet eerst worden geïntegreerd over  $y$ , en wel van 0 tot de kleinste der beide waarden  $y$  of  $\eta$  en dan over  $\eta$  van 0 tot  $b$ . Dus wordt ook

$$z = \nu^2 \int_0^b \left\{ \int_0^{\min(y, \eta)} \frac{(y-y_1)(\eta-y_1)}{B(y_1)} dy_1 \right\} L(\eta) d\eta$$

$$\varphi = \nu^2 \int_0^b \left\{ \int_0^{\min(y, \eta)} \frac{dy_1}{T(y_1)} \right\} L(\eta) d\eta$$

waarin  $\int_0^{\min(y, \eta)}$  een integratie voorstelt van 0 tot de kleinste der beide waarden  $y$  en  $\eta$ .

Met verg. (12) kan hiervoor worden geschreven

$$z(y) = \nu^2 \int_0^b K_{11}(y, \eta) (u_{11} z + u_{12} \varphi) d\eta, \quad K_{11} = \int_0^{\min(y, \eta)} \frac{(1-y_1)(\eta-y_1)}{B(y_1)} dy_1$$

$$\varphi(y) = \nu^2 \int_0^b K_{22}(y, \eta) (u_{21} z + u_{22} \varphi) d\eta, \quad K_{22} = \int_0^{\min(y, \eta)} \frac{dy_1}{T(y_1)}$$

In matrixvorm geschreven wordt dit

$$\underline{f}(y) = \nu^2 \int_0^b \underline{K}(y, \eta) \underline{u}(\eta) \underline{f}(\eta) d\eta \quad (14)$$

waarbij  $\underline{u}$  en  $\underline{f}$  de vroegere betekenissen hebben in  $\underline{K}$  gelijk is aan

$$\underline{K}(y, \eta) = \begin{vmatrix} K_{11}(y, \eta) & 0 \\ 0 & K_{22}(y, \eta) \end{vmatrix}$$

Bij geschikte generalisering der matrices geldt verg. (14) algemeen.

## 5. Existentie der eigenwaarden. Ontwikkelingsstelling.

Stellen we in verg. (14)  $\nu^2 = \lambda$  en  $\underline{D}(y, \eta) = \underline{K}(y, \eta) \underline{u}(\eta)$  dan wordt de matrix-integraalvergelijking

$$\underline{f}(y) = \lambda \int_0^b \underline{D}(y, \eta) \underline{f}(\eta) d\eta \quad (15)$$

Gaan we terug tot de afzonderlijke vergelijkingen van dit stelsel, dan is bv. de  $k^{\text{de}}$  verg.:

$$f_k(y) = \lambda \int_0^b \sum_{\ell} D_{k\ell}(y, \eta) f_{\ell}(\eta) d\eta$$

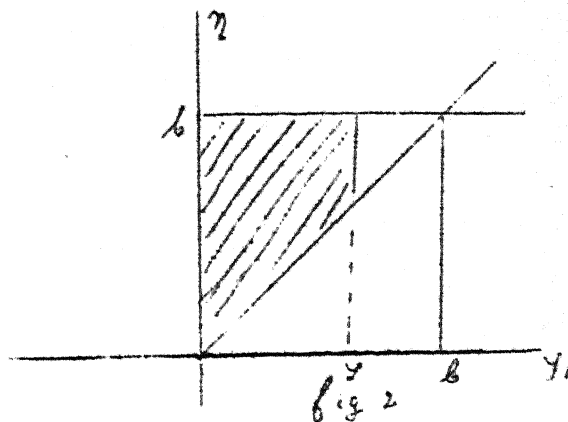
Hierin zullen we de integraal benaderen door een algebraïsche integratieregels (trapeziumregel; regel van Simpson), zodat alleen de waarde van de functies  $f_k$  in een eindig aantal basispunten een rol speelt. Dit is geoorloofd omdat de functies  $D_{k\ell}$  voor alle waarden van  $y$  en  $\eta$  eindig blijven. Dan wordt

$$f_k(y_i) = \lambda \sum_{\ell} \sum_j D_{k\ell}(y_i, \eta_j) f_{\ell}(\eta_j) \sigma(\eta_j),$$

waarbij de getallen  $\sigma(\eta_j)$  door de gekozen integratieregels zijn bepaald. Dit zijn  $n$  lineaire, homogene vergelijkingen tussen de  $n$  grootheden  $f_k(y_i)$ , waarbij  $n$  het product voorstelt van het aantal functies  $f_k$  en het aantal punten  $y_i$ , waar de functies bepaald worden. Dit stelsel vergelijkingen kunnen we ook schrijven als een enkele algebraïsche matrixverg.

$$\underline{f} = \lambda \underline{D} \underline{f}$$

(16)





waarbij dus de elementen van  $\underline{f}$  de grootheden  $f_k(y_i)$  zijn. Uit de theorie der lineaire vergelijkingen volgt verder dat verg. (16) een van 0 verschillende oplossing heeft voor die waarden van  $\lambda$ , waarvoor de karakteristieke determinant

$$|\lambda \underline{D} - \underline{J}| = 0$$

is ( $\underline{I}$  = eenheidsmatrix). De hoogste graadsterm van deze karakteristieke vergelijking luidt  $\lambda^n |\underline{D}|$ , zodat er n eindige oplossingen voor  $\lambda$ , zgn. eigenwaarden, bestaan, indien  $\underline{D} \neq 0$  is. Bij de trillende vleugel is  $\underline{D} \neq 0$ , terwijl bovendien de eigenwaarden in het algemeen verschillend zijn. Bij iedere eigenwaarde  $\lambda_i$  behoort een eigenvector  $\underline{f}_i$ . De eigenvectoren zijn lineair onafhankelijk.

Omdat de eigenvectoren een lineair onafhankelijk stelsel vormen, kan iedere willekeurige vector  $\underline{t}$ , die n elementen bevat, naar dit stelsel worden ontwikkeld, d.w.z. in de relatie

$$\underline{t} = \sum_{i=1}^n c_i \underline{f}_i$$

zijn de coëfficiënten  $c_i$  eenduidig bepaald. Dit volgt onmiddellijk uit het niet verdwijnen van de determinant gevormd door de n vectoren  $\underline{f}_i$ .

Wanneer men n tot oneindig laat naderen door het aantal punten  $y_i$  hoe langer hoe groter te maken, dan zullen de oplossingen van verg. (16) naderen tot die van verg. (15). Voor de nauwkeurige limietovergang zij verwezen naar v. Mises-Frank. De volgende conclusies kunnen thans worden getrokken:

1° De integraalvergelijking (15) en dus ook het eigenwaardeprobleem (9) heeft een oneindig aftelbaar aantal eigenwaarden, die gerangschikt zullen worden in volgorde van toenemende modulus, d.w.z.

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \dots \quad (17)$$

2° Een functievector, die aan de randvoorwaarden voldoet en tezamen met haar eerste en tweede afgeleide continu is, kan ontwikkeld worden in een uniform convergente reeks

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(y) \quad (18)$$

## 6. Orthogonaliteit.

We zullen eerst bewijzen, dat het eigenwaardeprobleem (9), indien het zelf-geadjungeerd is, alleen reële eigenwaarden bezit. Zij  $\lambda_i$ ,  $\underline{f}_i$  een oplossing van (9) en dus  $\lambda_i^*$ ,  $\underline{f}_i^*$  een oplossing van de vergelijking die uit (9) volgt door  $\underline{u}$  door  $\underline{u}^*$  te vervangen, dan geldt

$$\underline{e} \underline{f}_i = \lambda_i \underline{u} \underline{f}_i, \quad \underline{e} \underline{f}_i^* = \lambda_i^* \underline{u}^* \underline{f}_i^* \quad (19)$$

Door vermenigvuldiging resp. met  $\underline{f}_i^*$  en  $\underline{f}_i$  en door vervolgens te integreren over het interval van 0 tot b, wordt

$$\lambda_i = \frac{\int_0^b \underline{f}_i^* \underline{e} \underline{f}_i dy}{\int_0^b \underline{f}_i^* \underline{u} \underline{f}_i dy}, \quad \lambda_i^* = \frac{\int_0^b \underline{f}_i \underline{e} \underline{f}_i^* dy}{\int_0^b \underline{f}_i \underline{u} \underline{f}_i^* dy} \quad (20)$$

Op grond van verg. (10) zijn de tellers, evenals de noemers onderling gelijk, zodat  $\lambda_i$  en  $\lambda_i^*$  ook gelijk zullen zijn, tenzij alle tellers en noemers 0 zijn. Dit laatste doet zich niet voor, want zijn  $z_i$  en  $\varphi_i$  de elementen van  $\underline{f}_i$ , dan is op grond van verg. (10a)

$$\int_0^b \underline{f}_i^* \underline{f}_i dy = \int_0^b \left( B \frac{d^2 z_i^*}{dy^2} \cdot \frac{d^2 z_i}{dy^2} + T \frac{d\varphi_i^*}{dy} \cdot \frac{d\varphi_i}{dy} \right) dy > 0$$

Dus is  $\lambda_i = \lambda_i^*$ , d.w.z.  $\lambda_i$  is reëel.

Schrijft men de 2<sup>de</sup> vergelijking (19) op voor de oplossing  $\lambda_j^*, \underline{f}_j^*$  en vermenigvuldigt men beide vergelijkingen resp. met  $\underline{f}_j^*$  en  $\underline{f}_i$ , dan komt er in plaats van (20):

$$\lambda_i = \frac{\int_0^b \underline{f}_j^* \underline{f}_i dy}{\int_0^b \underline{f}_j^* \underline{u} \underline{f}_i dy} \quad \lambda_j^* = \frac{\int_0^b \underline{f}_i \underline{f}_j^* dy}{\int_0^b \underline{f}_i \underline{u} \underline{f}_j^* dy} \quad (21)$$

Omdat  $\lambda_i \neq \lambda_j^*$  kan geconcludeerd worden dat nu alle tellers en noemers 0 zijn. Dit leidt tot de orthogonaliteitsrelatie

$$\int_0^b \underline{f}_j^* \underline{f}_i dy = \int_0^b \underline{f}_j^* \underline{u} \underline{f}_i dy = 0 \quad \text{als } i \neq j \text{ is.} \quad (22)$$

Gaan we thans over tot het niet zelf-geadjungeerde eigenwaardeprobleem, d.w.z.  $\underline{u}' \neq \underline{u}^*$ , dan moeten we naast verg. (9) de zgn. getransponeerde vergelijking

$$\underline{u} \underline{g} = \underline{x} \underline{u}' \underline{g}, \quad (23)$$

waarbij  $\underline{g}$  aan dezelfde randvoorwaarden als  $\underline{f}$  voldoet, beschouwen.

In analogie met verg. (20) kan thans worden afgeleid

$$\lambda_i = \frac{\int_0^b \underline{g}_i' \underline{f}_i dy}{\int_0^b \underline{g}_i' \underline{u} \underline{f}_i dy} \quad \text{en} \quad x_i = \frac{\int_0^b \underline{f}_i \underline{u} \underline{g}_i dy}{\int_0^b \underline{f}_i \underline{u}' \underline{g}_i dy} \quad (24)$$

Op grond van de verg. (10a) en (10b) zijn de beide tellers en de beide noemers gelijk. Wanneer  $\underline{u}$  een matrix is, die oneindig weinig van een Hermite'se matrix  $\underline{u}_0$  afwijkt, dan zal  $\int_0^b \underline{g}_i' \underline{u} \underline{f}_i dy$  ook oneindig weinig van  $\int_0^b \underline{g}_i' \underline{u}_0 \underline{f}_i dy$  afwijken en dus ongelijk aan 0 zijn. De tellers en de noemers zijn dus niet 0, zodat  $\lambda_i$  en  $x_i$  gelijk zijn. De oorspronkelijke verg. (9) en de getransponeerde verg. (23) hebben dus dezelfde eigenwaarden.

In analogie met verg. (21) geldt

$$\lambda_i = \frac{\int_0^b \underline{g}_j \underline{f}_i dy}{\int_0^b \underline{g}_j \underline{u} \underline{f}_i dy} \quad \text{en} \quad \lambda_j = \frac{\int_0^b \underline{f}_i \underline{u} \underline{g}_j dy}{\int_0^b \underline{f}_i \underline{u}' \underline{g}_j dy}$$

waaruit op grond van (10a). (10b) en van  $\lambda_i \neq \lambda_j$  volgt dat

$$\int_0^b \underline{g}_j \underline{f}_i dy = \int_0^b \underline{g}_j \underline{u} \underline{f}_i dy = 0 \quad \text{als } i \neq j \quad (25)$$

Deze gelijkheid wordt bi-orthogonaliteitsrelatie genoemd, omdat zij een orthogonaliteit uitdrukt tussen de vectoren van twee verschillende systemen.

Een gedeeltelijke normering der vectoren kan worden ingevoerd door te stellen

$$\int_0^b \underline{g}_i' \underline{f}_i dy = 1, \quad \lambda_i \int_0^b \underline{g}_i \underline{u} \underline{f}_i dy = 1. \quad (26)$$

Een vollediger normering blijkt geen voordelen te bezitten. Ten slotte moge opgemerkt worden dat in de ontwikkelingen

$$\underline{f}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \underline{f}_i(y) \quad , \quad \underline{g}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \underline{g}_i(y)$$

de coëfficiënten zodanig zijn, dat  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i$  convergeert. Immers met behulp van (25) en (26) geldt

$$\int_0^b \underline{g}_i' \underline{e} \underline{f} dy = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \quad (27)$$

De coëfficiënten zijn gelijk aan

$$\alpha_i = \lambda_i \int_0^b \underline{g}_i' \underline{u} \underline{f} dy \quad , \quad \beta_i = \lambda_i \int_0^b \underline{f}_i' \underline{u} \underline{g} dy .$$

## 7. Methode van Galenkin.

Terwijl tot nu toe de algemene eigenschappen van de oplossingen van het eigenwaardeprobleem (9) zijn onderzocht, zullen we thans nagaan hoe we, bij gebrek aan een methode om een analytische oplossing aan te geven, benaderingsoplossingen kunnen vinden.

Bij de methode van Galenkin wordt uitgegaan van N gegeven functie-vectoren  $\underline{F}_J$ , die aan de randvoorwaarden voldoen. De N eigenvectoren, die behoren bij de laagste N eigenwaarden, worden benaderd door reeksen van het type  $\sum_{J=1}^N q_J \underline{F}_J$ , waarbij een voorschrift wordt hoe de van iedere eigenvector verschillende coëfficiënten  $q_J$  berekend moeten worden.

Bij substitutie van  $\underline{f} = \sum_{J=1}^N q_J \underline{F}_J$  in verg. (9) zal deze verg. in het algemeen niet bevredigd worden, wat we ook nemen voor  $\lambda$  of voor de coëfficiënten  $q_J$ . Er ontstaat dus een foutenvector  $\underline{\varepsilon}$ , nl.

$$\sum_{J=1}^N q_J (\underline{e} \underline{F}_J - \lambda \underline{u} \underline{F}_J) = \underline{\varepsilon}$$

waarbij de elementen van  $\underline{\varepsilon}$  weer functies van y zijn. Fysisch kan men deze elementen interpreteren als de extra krachten, die nodig zijn om bij de frequentie  $\lambda$  de trillingsvorm  $\sum_{J=1}^N q_J \underline{F}_J$  op te drukken.

Het essentiële punt in de methode van Galenkin is nu voor N geschikt gekozen, gewogen gemiddelden van  $\underline{\varepsilon}$ , die onderling lineair onafhankelijk moeten zijn, gelijk aan 0 te maken. D.w.z. men eist bij gekozen vectoren  $\underline{G}_H$ , dat

$$\int_0^b \underline{G}_H' \underline{\varepsilon} dy = 0 \quad , \quad H = 1, 2, \dots, N$$

of wel na substitutie van  $\underline{\varepsilon}$

$$\sum_{J=1}^N q_J \int_0^b (\underline{G}_H' \underline{F}_J - \lambda \underline{G}_H' \underline{u} \underline{F}_J) dy = 0 \quad (28)$$

Dit is een homogeen stelsel van N lineaire, algebraïsche vergelijkingen, waaruit de onbekenden  $q_J$  en de parameter  $\lambda$  kunnen worden opgelost. De resultaten voor  $\lambda$  en voor de uitdrukkingen  $\sum_{J=1}^N q_J \underline{F}_J$  zijn invariant voor lineaire transformaties binnen ieder der stelsels vectoren  $\underline{F}_J$  en  $\underline{G}_H$ .

Een punt van willekeur in de methode vormt nog de keuze van de stelsels  $\underline{F}_J$  en  $\underline{G}_H$ . Het zal duidelijk zijn dat men er naar moet streven,

dat de vectoren  $\underline{F}_J$  door lineaire combinatie de eigenvectoren  $\underline{f}_K$  ( $K=1, 2, \dots, N$ ) zo goed mogelijk kunnen benaderen, d.w.z. dat in de ontwikkelingen

$$\underline{F}_J = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{iJ} \underline{f}_i \quad (29)$$

de coëfficiënten  $\alpha_{iJ}$  voor  $i \gg N+1$  zo klein mogelijk worden, maar we zullen laten zien dat het, althans wat de eigenschappen betreft, precies even belangrijk is dat in de ontwikkelingen

$$\underline{G}_H = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{iH} \underline{g}_i \quad (30)$$

de coëfficiënten  $\beta_{iH}$  voor  $i \gg N+1$  ook klein zijn.

We zullen nu nagaan hoe de afwijkingen in frequenties ( $\lambda$ ) en trillingsvormen ( $\sum_{J=1}^N q_J \underline{F}_J$ ) samenhangen met de ontwikkelingscoëfficiënten  $\alpha_{iJ}$  en  $\beta_{iH}$ . We zullen hiertoe eerst de ontwikkelingen (29) en (30) vervangen door

$$\underline{F}_J = \underline{f}_J + \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_{iJ} \underline{f}_i ; \underline{G}_H = \underline{g}_H + \sum_{i=N+1}^{\infty} \beta_{iH} \underline{g}_i ; H, J = 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

waarbij  $\alpha_{iJ}$  en  $\beta_{iH}$  andere waarden hebben als in (29) en (30). Dit komt neer op lineaire transformaties in de stelsels  $\underline{F}_J$  en  $\underline{G}_H$ . Weliswaar zijn de vectoren (31) niet bekend (zij zouden inderdaad al uitmuntende benaderingen zijn voor de vectoren  $\underline{f}_J$ ,  $\underline{g}_H$ !), maar zij leveren bij toepassing van de methode van Galenkin dezelfde resultaten als (29) en (30). De foutenberekening mag dus op (31) worden gebaseerd.

Door gebruik te maken van (25) en (26) leidt substitutie van (31) in de vergelijkingen (28) tot

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_H}\right) q_H + \sum_{J=1}^N q_J \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) \alpha_{iJ} \beta_{iH} = 0 \quad H = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Het mag worden verwacht, dat indien in de  $k^{\text{de}}$  oplossing  $\lambda_k, q_{Jk}$ , de coëfficiënt  $q_{kk} = 1$  wordt gesteld, de coëfficiënten  $q_{Jk}$  met  $J \neq K$  klein t.o.v. 1 zullen zijn. Ware dit niet zo, dan zou  $\sum_{J=1}^N q_{Jk} \underline{F}_J$  aanzienlijk van  $\underline{F}_k$  en dus van  $\underline{f}_k$  gaan afwijken. Bij verwaarlozing van  $q_{Jk}$  voor  $J \neq K$ , levert de  $K^{\text{de}}$  verg. (32)

$$\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_k} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) \alpha_{ik} \beta_{ik} \quad (33)$$

als  $\tilde{\lambda}_k$  de gevonden benaderde waarde voor  $\lambda_k$  voorstelt.

De overige vergelijkingen leveren

$$q_{Hk} = - \frac{\sum_{i=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) \alpha_{ik} \beta_{iH}}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_H}} \quad \text{als} \quad H \neq K \quad (34)$$

Met behulp van deze uitkomsten kunnen nog nauwkeuriger benaderingen voor  $\tilde{\lambda}_k$  en  $q_{Hk}$ , die dan termen van de 3de en 4de graad in  $\alpha_{iJ}$  en  $\beta_{iH}$  bevatten, worden afgeleid. In dezelfde benadering als (34) wordt voor de trillingsvormen gevonden

$$\sum_{H=1}^N q_{Hk} \underline{F}_H = \underline{f}_k + \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_{ik} \underline{f}_i - \sum_{H=1}^N \left( \frac{\sum_{i=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) \alpha_{ik} \beta_{iH} \underline{f}_i}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_H}} \right) \quad (35)$$

Indien  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$  klein van de eerste orde worden verondersteld, blijkt de fout in de eigenwaarde klein van de 2<sup>de</sup> orde, maar die in de eigenvector klein van de 1<sup>ste</sup> orde te worden. Formule (33) toont onmiddellijk dat zowel  $\alpha_{ik}$  als ook  $\beta_{ik}$  klein moet worden gehouden.

Voorts volgt uit (33), dat voor zelf-geadjungeerde systemen ( $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ ) alle eigenwaarden overschat worden. Deze eigenschap is verloren gegaan bij de generalisatie naar niet zelf-geadjungeerde systemen.

De nauwkeurigheid van de laagste eigenwaarden met eigenvectoren wordt natuurlijk aanzienlijk verbeterd indien men de stelsels  $\underline{F}_1$  en  $\underline{G}_N$  uit iets meer dan N vectoren laat bestaan.

Het is aan te bevelen  $\underline{F}_J$  en  $\underline{G}_N$  zo te kiezen, dat werkelijk de N laagste eigenvectoren worden benaderd. Wordt in plaats van  $\underline{F}_J \in \mathbb{R}^{N \times N}$  benaderd, dan worden de fouten in (33) en (35) belangrijk groter, omdat de termen  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$  en  $\frac{\alpha_{ik} \beta_{ik}}{\lambda_i}$  voor lagere waarden van i groter zijn dan voor hogere.

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

voordracht op 12 April 1951.

Grafische behandeling van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen  
van de eerste orde. (methode der isoklinen).

door

Prof. Dr S.C. van Veen.

1) De niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van de 1<sup>e</sup> en hogere orde behoren tot de moeilijk handelbare objecten uit de wiskunde. Slechts in zeldzame uitzonderingsgevallen is een integratie in eindige vorm te verwerkelyken. Met analytische hulpmiddelen is het weliswaar mogelijk het gedrag der oplossingen in de omgeving van een gewoon punt te onderzoeken, terwijl er ook met meerdere moeite iets over het vaak zeer gecompliceerde bedrag in de omgeving der singuliere punten kan worden vastgesteld; het is echter in meeste gevallen uitgesloten met analytische hulpmiddelen een volledig overzicht van het verloop der integraalkrommen in hun geheel te verkrijgen.

Toch is dit laatste van het grootste belang voor technische en fysieke toepassingen, waar er in het algemeen meer waarde wordt gehecht aan de kennis van het globaal verloop van deze krommen dan aan een nauwkeurige berekening in een zeer beperkt gebied.

Voor het verkrijgen van een globaal overzicht van de integraalkrommen, is de methode der isoklinen bijzonder geschikt.

Stellen we ons de differentiaalvergelijking van de eerste orde bepaald door

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (1)$$

dan is de meetkundige betekenis hiervan, dat aan een willekeurig punt  $(x_0, y_0)$  een lijnsegment met de richting

$$\frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0)$$

wordt toegevoegd, m.a.w. de integraalkromme (=oplossing) die gaat door het punt  $(x_0, y_0)$  heeft in dat punt een raaklijn bepaald door de richtingscoëfficiënt

$$\frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0).$$

Men kan dus de integraalkromme in de naaste omgeving van  $(x_0, y_0)$  tekenen.

Bij de isoklinen-methode bepaalt men nu eerst de kromme lijnen in  $r$  punten de daardoor gaande integraal-krommen gelijke helling vertonen. Deze isoklinen, behorende bij een richting  $\frac{dy}{dx} = k$  worden volgens (1) bepaald door

$$f(x,y)=k \quad (2)$$

en de bepaling van deze isoklinen is een kwestie van analytische meetkunde. Voor de bepaling en benadering van het verloop van de integraal-krommen is het van belang voor een verzameling discrete waarden van  $k$ ,  $k_1, k_2, \dots$  de bijbehorende isoklinen (2) te construeren. Men spreekt dan van een isoklinen-veld. Men kan op ieder der isoklinen door een lijnelementje b.v. nog de richting van de integraalkromme aangeven.

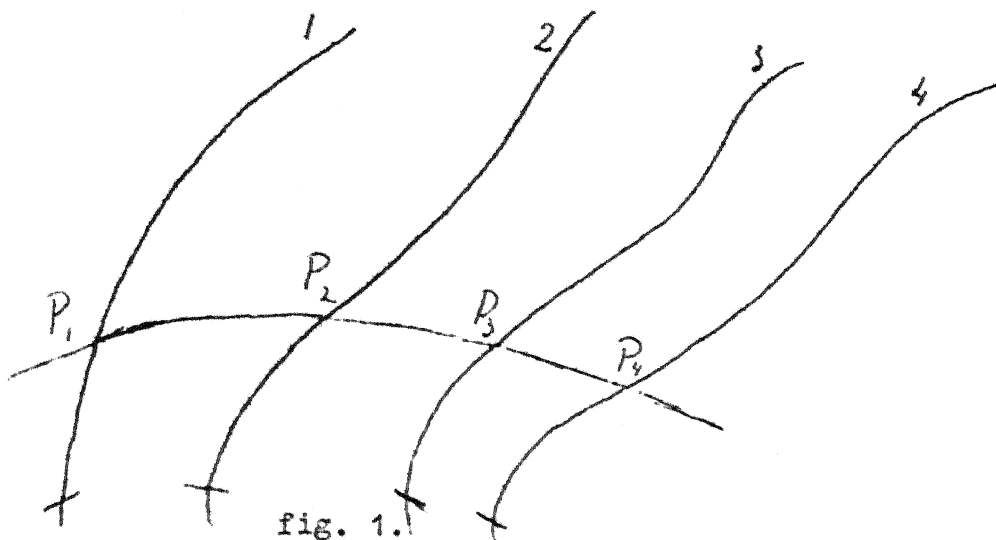


fig. 1.

Om nu de integraalkromme door een willekeurig punt van de 1<sup>e</sup> isokline  $P_1$  te construeren, moeten wij een kromme lijn door  $P_1$  tekenen, die de 1<sup>e</sup> isokline in de gegeven richting snijdt, en dan moet er op de één of andere wijze voor gezorgd worden dat ook de volgende isoklinen in  $P_2, P_3$  enz. in de daarbij aangegeven richtingen worden gesneden. Het is duidelijk, dat dit probleem in de grond onbepaald is. Toch zullen wij zien, dat er met een behoorlijke benadering een integraalkromme te construeren is.

Voorbeelden:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ . (3)

Isoklinen  $-\frac{x}{y} = \text{const.}$  (rechten door 0).

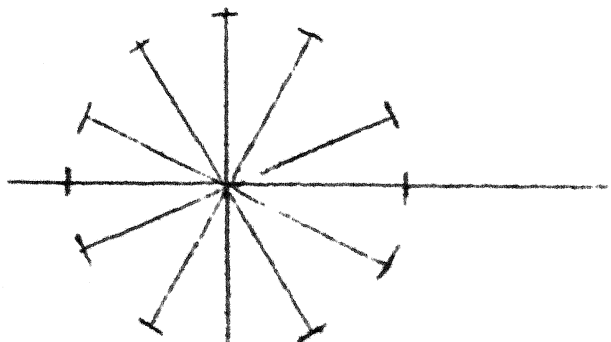


fig. 2

De richtings-elementen zijn hier loodrecht op de isoklinen. Men komt gemakkelijk tot het inzicht, dat de integraalkrommen concentrische cirkels om 0 zijn, zoals ook door integratie van (3) volgt.

2) Om tot een enigszins betrouwbare constructie van de integraal-kromme over een niet te beperkt gebied te komen, moeten wij eerst beschikken over een isoklinen-veld waarbij de afstand der isoklinen niet groot is.

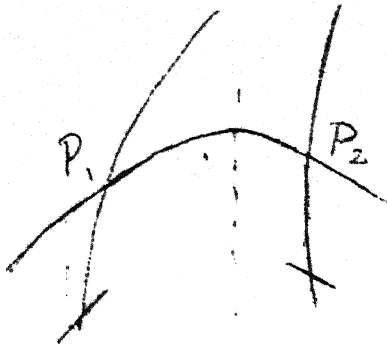


fig. 3

Als het gegeven punt  $P_1$  van de integraal-kromme en het voorlopig onbekende punt  $P_2$  niet ver van elkaar verwijderd zijn, dan kan de boog  $P_1P_2$  worden benaderd door een parabool met verticale as. Dit komt analytisch neer op de reeksontwikkeling in de omgeving van het punt  $P_1(x_1, y_1)$ .

$$y = y_1 + A(x - x_1) + B(x - x_1)^2 + \dots$$

waarbij men zich beperkt tot de termen van de 2<sup>e</sup> graad.

Dit is voor niet te grote waarden van  $P_1P_2$  ongetwijfeld geoorloofd. De constructie van de boog  $P_1P_2$ , in het bijzonder van het punt  $P_2$  komt dus neer op de bepaling van de parabool met verticale as, waarvan in  $P_1$  een punt en een raaklijn in dat punt is gegeven, terwijl in  $P_2$  de richting van de raaklijn bekend is (het punt  $P_2$  echter niet). Deze verdere bepaling berust op enige elementaire eigenschappen van de parabool met verticale as.

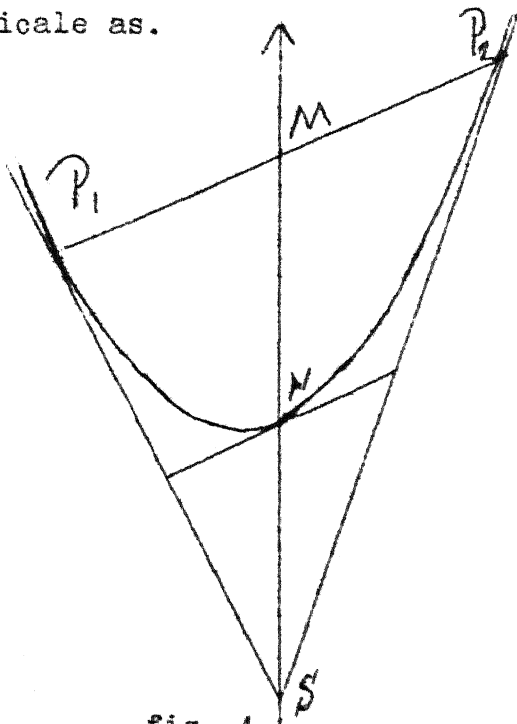


fig. 4

- I) Het snijpunt  $S$  van de raaklijnen in  $P_1$  en  $P_2$  ligt verticaal onder het midden  $M$  van de koorde  $P_1P_2$ .
- II)  $MS$  snijdt de parabool in een punt  $N$  zodat  $MN = NS$ .
- III) De raaklijn in  $N$  loopt evenwijdig met  $P_1P_2$ .

Bewijs zeer eenvoudig met poolverwantschap. Verbindingslijn  $SM$  is poollijn van het punt op oneindig van  $P_1P_2$ , dus  $SM$  loopt in de asrichting.

Dan zijn  $S$  en  $M$  harmonisch toegevoegd aan  $N$  en het punt op oneindig van  $SM$  m.a.w.  $N$  is het midden van  $SM$ .

Tenslotte gaat de raaklijn in  $N$  door de pool van  $SM$ , d.i. het punt op oneindig van  $P_1P_2$ . Dus raaklijn in  $N \parallel P_1P_2$ . In figuur 3 moet dus punt  $P_2$  zo worden geconstrueerd, dat de raaklijn in  $P_2$  de raaklijn in  $P_1$  snijdt in een punt loodrecht boven het midden  $M$  van  $P_1P_2$ .

De praktische uitvoering van deze constructie is het eenvoudigst uitvoerbaar volgens de principes der grafistatica, door invoering van een pool.



Stel S is de pool (fig. 5).  $S_1$  en  $S_2$  stellen de richtingen voor, behorende bij de isoklinen 1 en 2.

K is het midden van 1 en 2. Trek SK.

De lijn door  $P_1 \parallel SK$  snijdt de 2<sup>e</sup> isokline in  $P_2$ .

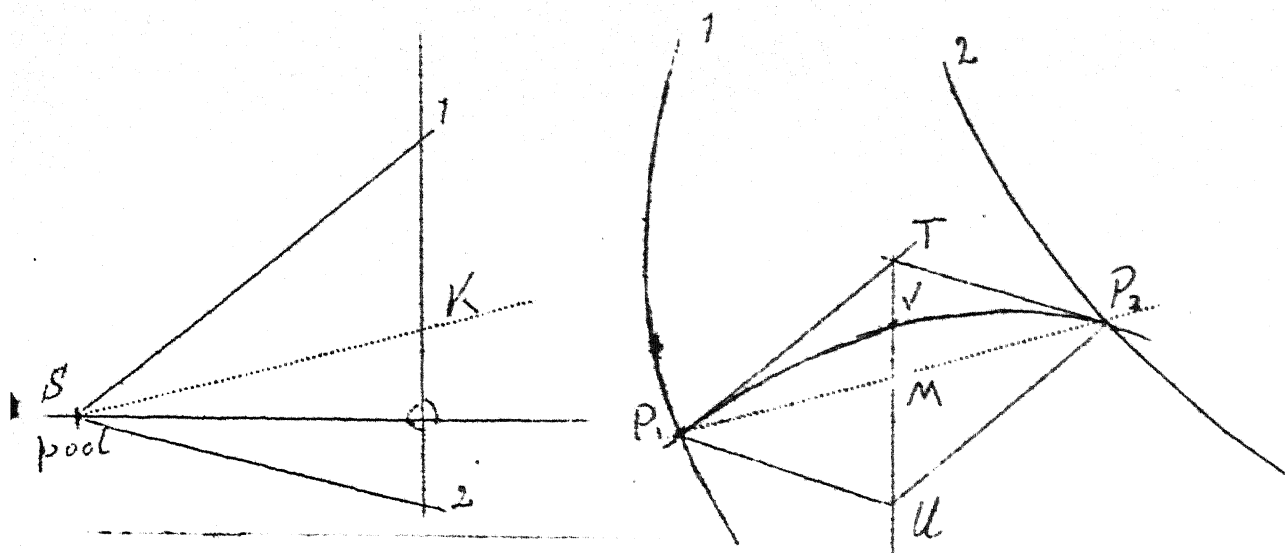


fig. 5

Het bewijs volgt onmiddellijk uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $S_1 2$  en  $P_1 TU$  ( $P_1 T P_2 U$  is een parallelogram).

Van de integraalkromme is verder nog het punt V (midden van TM) en de raaklijn in V ( $\parallel P_1 P_2$ ) bekend.

3) Toepassingen. Ook differentiaalvergelijkingen van de tweede orde kunnen vaak met behulp van de isoklinen-methode worden onderzocht, b.v.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0. \quad (4)$$

Stel  $\frac{dy}{dt} = v$ , dus  $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$ .

De differentiaalvergelijking gaat over in

$$v \frac{dv}{dy} + y = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{y}{v}. \quad (\text{zie (3)}).$$

De integraalkrommen van de laatste vergelijking worden dan cirkels om Q (in het y-v-vlak).

Bij gegeven  $v = \frac{dy}{dt}$  wordt t dan bepaald uit  $dt = \frac{dy}{v}$

$$t = \int \frac{dy}{v} \quad (\text{i.h.a. met numerieke integratie}).$$

Een klassiek geworden voorbeeld, dat tot nu toe met het meeste succes met behulp van de isoklinenmethode is onderzocht, is de vergelijking voor de relaxatietrillingen van van der Pol.

(B. van der Pol, Relaxation oscillations, Phil Mag. 2 928, 1926).

Bij bepaalde problemen uit de electronica (triodebuizen) werd van der Pol gevoerd tot de niet-lineaire differentiaal-vergelijking van de 2<sup>e</sup> orde:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (5)$$

(gedempte trilling met niet-lineaire damping).

$\varepsilon$  is een positieve numerieke constante. Van der Pol en anderen hebben het gedrag nagegaan voor kleine  $\varepsilon$ , matige  $\varepsilon$  en grote  $\varepsilon$ , i.h.b. voor  $\varepsilon=0.1$ ,  $\varepsilon=1$  en  $\varepsilon=10$ . Het gedrag voor grote  $\varepsilon$  biedt de grootste moeilijkheden.

Stellen wij in (5)  $\frac{dx}{dt} = y$ , dan gaat deze vergelijking gemakkelijk over in

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon(1-x^2) - \frac{x}{y} \quad (6)$$

Het is deze vergelijking, die wij speciaal willen onderzoeken met behulp van de methode der isoklinen.

Isoklinen: De isoklinen, behorende bij de vaste waarde  $\frac{dy}{dx} = k$  zijn:

$$y = \frac{x}{\varepsilon(1-x^2)-k} \quad (7)$$

Voor  $k \neq \varepsilon$  snijdt (7) de x-as in de oorsprong.

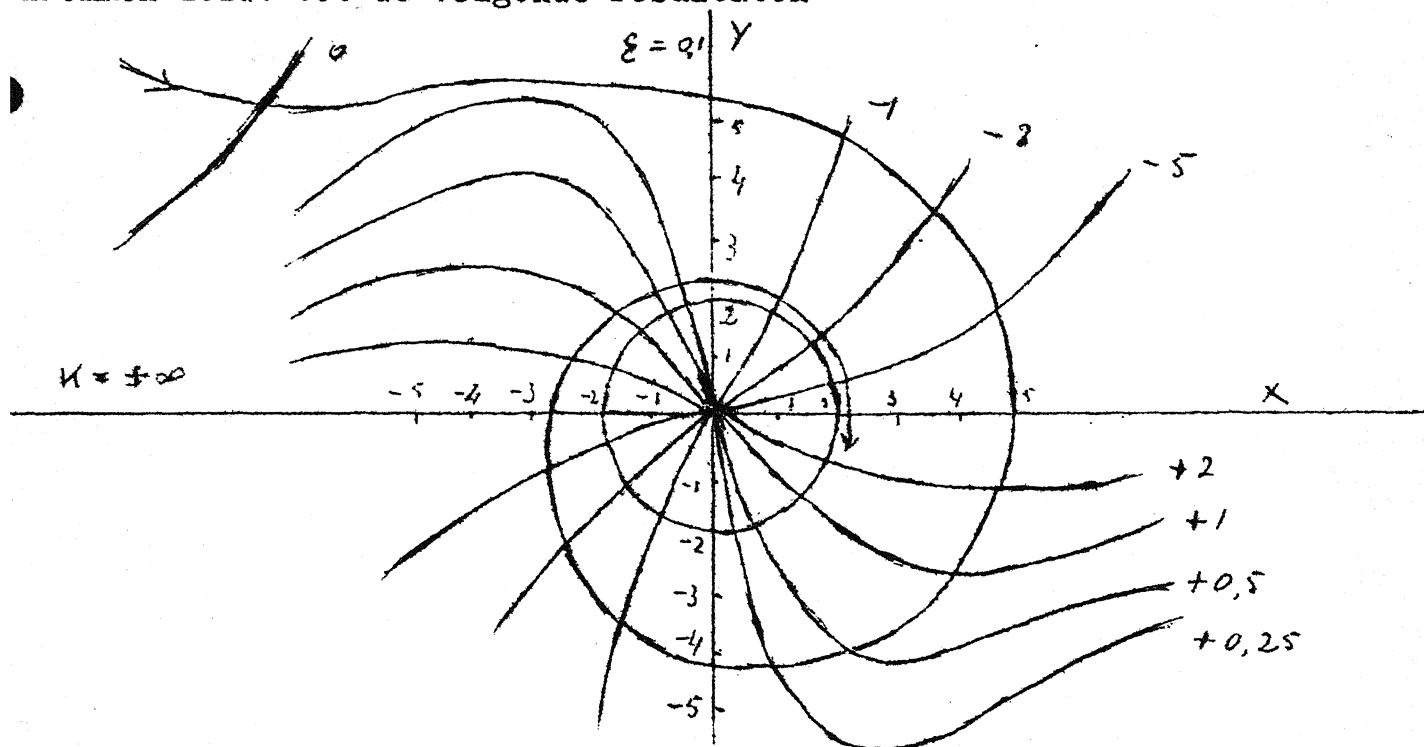
Voor  $k = \varepsilon$  ontgaat (7) in de y-as en de orthogonale hyperbool

$$xy = -\frac{1}{\varepsilon}$$

Voor  $k < \varepsilon$  zijn er reële verticale asymptoten voor  $x = \pm \sqrt{1 - \frac{k}{\varepsilon}}$ .

Voor alle reële waarden van  $k$  is de x-as asymptoot.

De bepaling van het isoklinen-veld en de daaruit volgende integraalkrommen leidt tot de volgende resultaten



De integraalkromme wordt een soort spiraal die van buitenaf asymptotisch nadert tot een gesloten kromme (cycle-limite: Poincaré).

(Bij een beginpunt binnen de cycle-limite nadert de kromme ook spiraalsgewijze tot de cycle-limite.)

Colloquim

Mathematische problemen uit de praktijk.

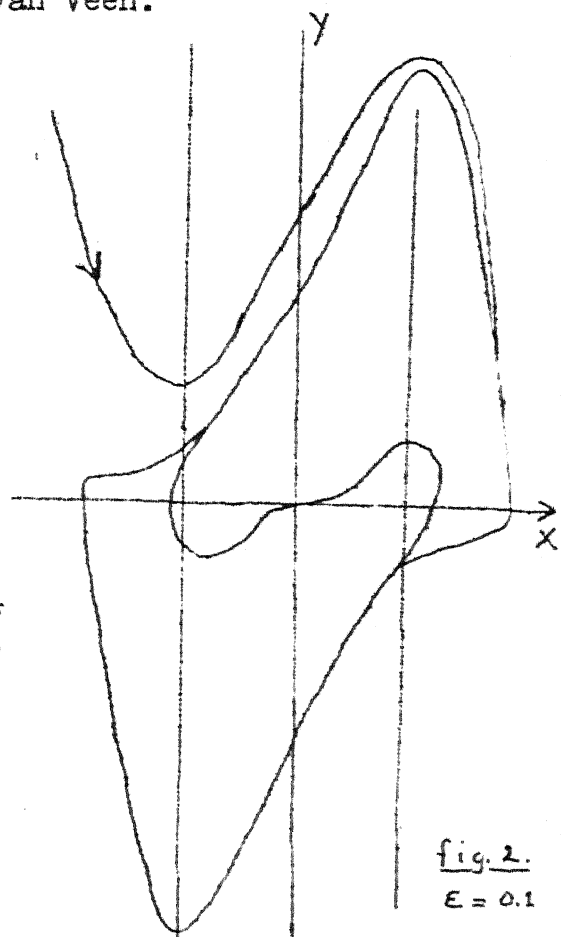
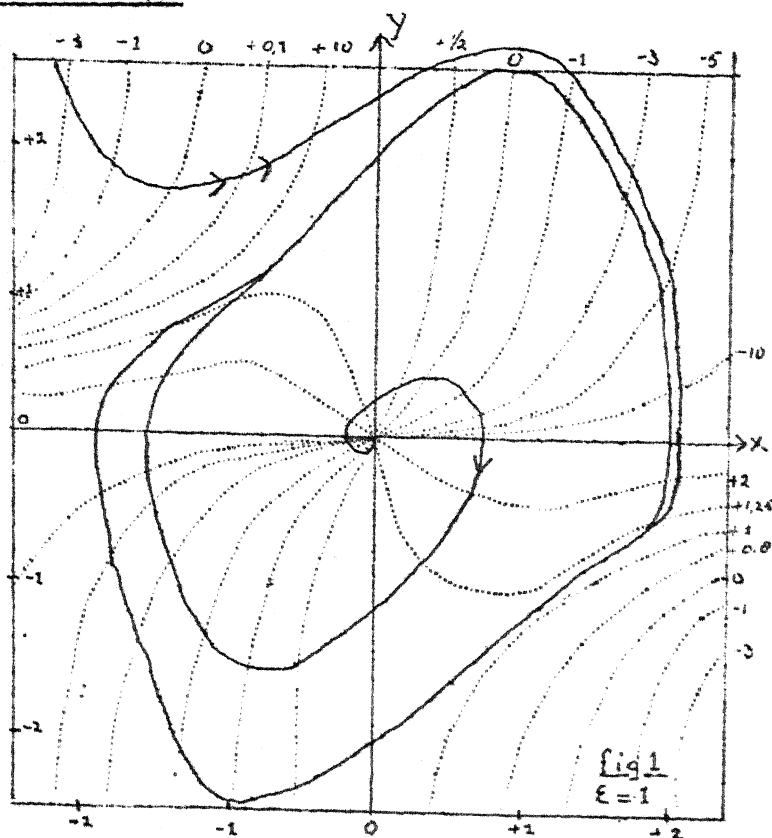
voordracht op 26 April 1951.

Grafische behandeling van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen  
van de eerste orde. (Methode der isoklinen).

door

Prof. Dr S.C.van Veen.

2<sup>e</sup> Lezing.



In figuur 1 en 2 zijn dezelfde resultaten voor de integraalkrommen herhaald voor de waarden  $\epsilon = 1$  en  $\epsilon = 0.1$ . Hoe groter  $\epsilon$  wordt, des te meer gaat de steeds optredende limiet-cycle over in een lang-gedichte kromme, die steeds sterker afwijkt van een cirkel. De bijbehorende trillingen zullen dan ook bij toenemende  $\epsilon$  sterker afwijken van harmonische trillingen.

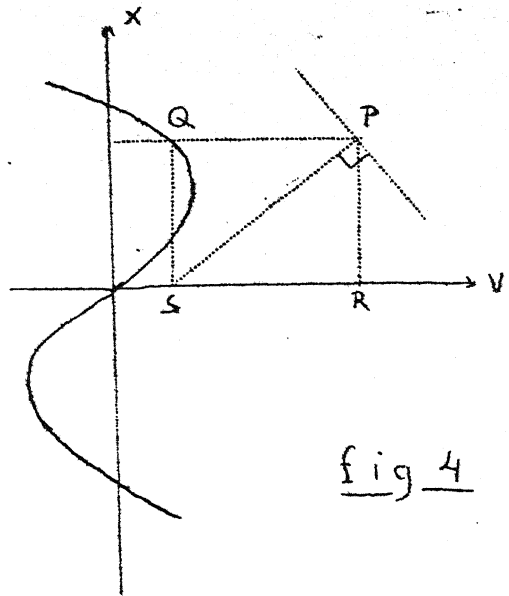
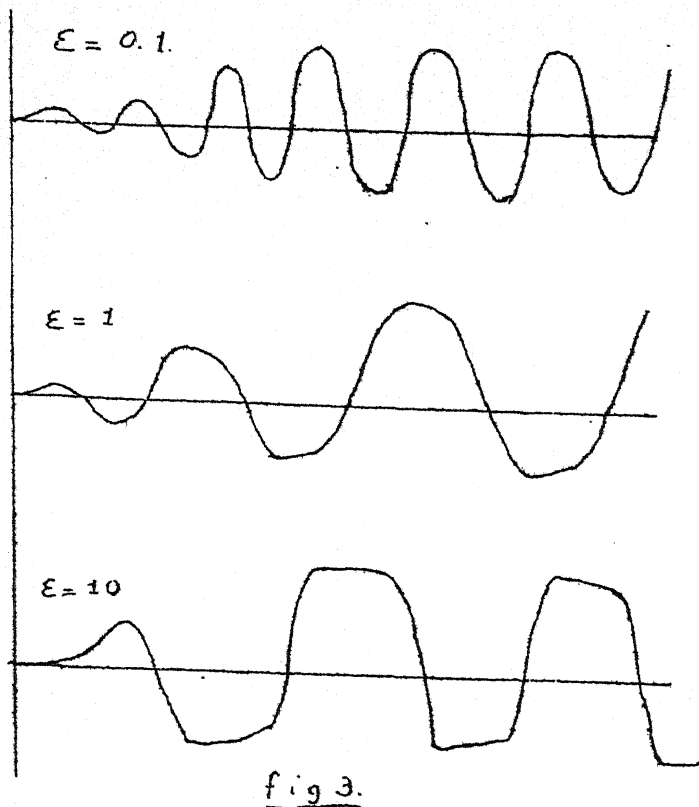
Uit de gevonden integraalkromme  $y=f(x)$  kan door mechanische integratie het verband tussen  $x$  en  $t$  worden afgeleid, wegens

$$\frac{dx}{dt} = y$$

is

$$t = \int \frac{dx}{y}.$$

Het resultaat is weergegeven in fig. 3.



Voor  $\epsilon=10$  en groter blijken de trillingen zeer sterk af te wijken van sinustrillingen. Deze trillingen worden door van der Pol relaxatie-trillingen genoemd. Van belang is het deze trillingen te onderzoeken voor zeer grote waarden van  $\epsilon$ . Dit is kwalitatief vrij eenvoudig te onderzoeken met de constructiemethode van Liénard. (Zie litteratuurlijst 3)).

#### 4) De constructie van Liénard.

Uit de vergelijking van van der Pol (6).

$$\frac{dy}{dx} = \epsilon(1-x^2) - \frac{x}{y}$$

volgt:

$$\frac{d\left\{y - \epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right\}}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Stel

$$y - \epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = v \tag{8}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x}{\epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + v} \tag{9}$$

Liénard construeert eerst de grafiek (fig. 4).

$v_1 = \epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$ . (karakteristieke kromme  $v_1$ )

Wanneer P een punt van de integraalkromme

$x = \rho(v)$  is, dan is

$$PQ = v - v_1 = v - \epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right).$$

(9) volgt:

$$\frac{dx}{dv} = -\frac{PQ}{PR} = -\operatorname{tg} SRR,$$

dus de raaklijn in P is loodrecht op PS.

Men vindt dan de volgende vormen voor de (v-x)kromme. (fig. 5).

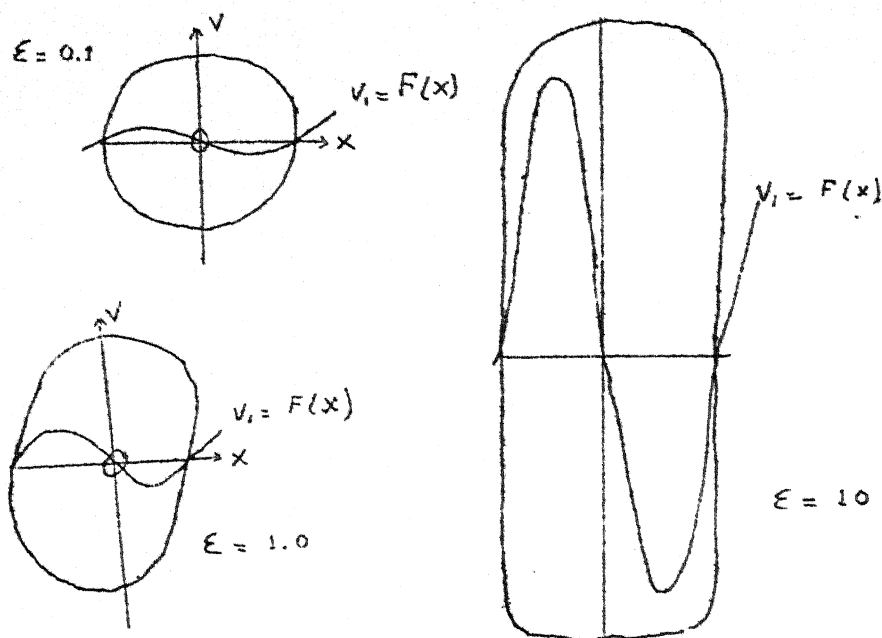


fig. 5 (v, x) diagrammen van Liénard.

### 5) Bepaling van de relaxatieperiode.

Het is van belang, de periode van de relaxatietrilling te berekenen, aangenomen, dat deze bij grote waarden van  $\varepsilon$  bij benadering wordt weergegeven door fig. 6. Dit kan worden gedaan door een lijnintegraal te berekenen, genomen langs de limiet-cyclus. Wij weten:

$$t = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \int \frac{dv}{\dot{v}} \quad (\text{wegens (9)}).$$

dus omlooptijd

$$T_1 = \oint \frac{dv}{\dot{v}} = 2\varepsilon \int_2^{\infty} \frac{(x^2-1)dx}{x} = 2\varepsilon \left( \log x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^{\infty} \\ = 1.614 \varepsilon.$$

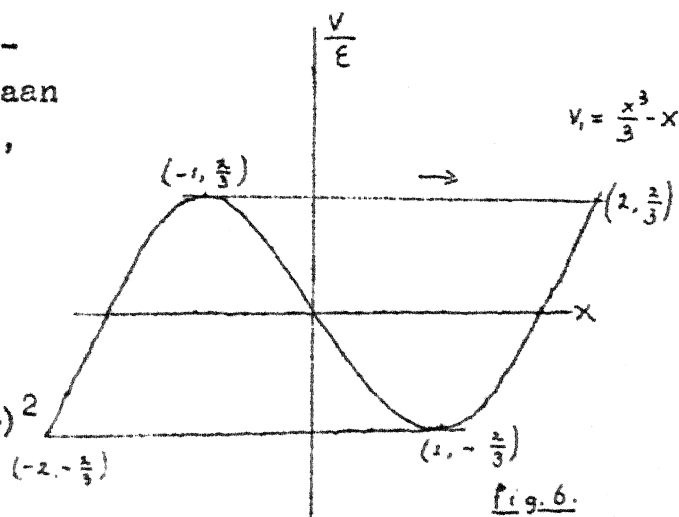


fig. 6.

Bij verdere benadering is gebleken dat deze uitkomst de correcte term van de hoogste orde in de asymptotische ontwikkeling voor grote waarden van  $\varepsilon$  levert. Dit ligt voor de hand, omdat men kan bewijzen dat de limiet-cyclus voor  $\varepsilon \rightarrow \infty$  zich precies gedraagt op de wijze zoals bij de afleiding van bovenstaande benaderingsformule is aangenomen.

Een asymptotische ontwikkeling voor  $T_1$  is onderzocht op zeer volledige

en algemene wijze door J. Haag (litt. 5 en 6). De schrijver beschouwt hierin differentiaalvergelijkingen van een algemeen type, welke de vergelijking van van der Pol als bijzonder geval bevatten. De volledige asymptotische ontwikkelingen voor het speciale geval van de vergelijking van van der Pol zijn afgeleid door A.A. Dorodnitsyn (litt. 7). Het resultaat is

$$T_1 = 1.614 \epsilon + \frac{7.014}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{22}{9} \frac{\log \epsilon}{\epsilon} + \frac{0.0087}{\epsilon} + O(\epsilon^{-\frac{4}{3}}).$$

## 6) Theoretische beschouwingen.

Bewijs van het bestaan van 1 enkele gesloten kromme in het Liénard-diagram.

Sedert Poincaré (litt. 8 en 9) hebben onderzoeken over het bestaan van limietcycli in het centrum der belangstelling gestaan. Op vrij eenvoudige wijze is deze kwestie onderzocht door N. Levinson en O.K. Smith (litt. 11). Zij beschouwen in plaats van de speciale vergelijking van van der Pol in getransformeerde vorm (9) de meer algemene vergelijking

$$\frac{dv}{dx} = \frac{g(x)}{F(x) - v} \quad (10)$$

Hiervan is de vergelijking van van der Pol het bijzondere geval:

$$g(x) = x \quad F(x) = \epsilon \left( \frac{x^3}{3} - x \right). \quad (11)$$

In (10) wordt algemeen verondersteld:

$g(x)$  en  $F(x)$  continu ;  $g(x)$  en  $F(x)$  oneven.

Algemene opmerkingen, die gemakkelijk te bewijzen zijn:

I) Als er een gesloten kromme aan (10) voldoet, dan moet hij de V-as snijden in 2 punten  $(0, v_0)$  en  $(0, -v_0)$  symmetrisch t.o.v. de oorsprong.

en omgekeerd:

II) Als een integraalkromme door de punten  $(0, v_0)$  en  $(0, -v_0)$  gaat, is hij noodzakelijk gesloten.

Wij zullen bewijzen dat er altijd één en precies één waarde  $v_0$  is, waarvoor een integraalkromme door de beide punten  $(0, v_0)$  en  $(0, -v_0)$  gaat.

Daartoe wordt ingevoerd de functie

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \int_0^x g(u) du$$

dus

$$\lambda(0, v) = \frac{1}{2} v^2 \quad (12)$$

Noem de snijpunten van de integraalkromme met de V-as A en B (zie fig. 7)  $A(0, v_A)$ ,  $B(0, v_B)$ .

Van  $F(x)$  worden nu nog de volgende veronderstellingen gemaakt:

- a)  $F(x)$  heeft slechts 1 enkelvoudig positief nulpunt  $x_0$ .

$$F(x) < 0 \text{ voor } 0 < x < x_0$$

Voor  $x > x_0$  is  $F(x)$  monotoon stijgend dus  $> 0$ .

- b)  $F(x) \rightarrow \infty$  met  $x$ .

Opgemerkt dient te worden dat  $F(x)$  niet monotoon behoeft te zijn voor  $0 < x < x_0$ .

Men ziet onmiddellijk dat  $F(x) = \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$  aan deze eisen voldoet.  $x_0 = \sqrt{3}$ .

Volgens (10) is :

$$v dv + g(x) dx = F(x) dv$$

of

$$d\lambda = F(x) dv$$

$$\int_A^B d\lambda = \lambda_B - \lambda_A = \int_A^B F(x) dv$$

Wegens (12) is

$$\int_A^B F(x) dv = \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2$$

waarbij de integraal wordt genomen langs de contour  $AKB_B$ .

Wij behoeven slechts te bewijzen, dat voor 1 contour  $\int_A^B F(x) dy = 0$  wordt.

Uit figuur 7 valt veel te concluderen.

Als de kromme  $AKB$  de kromme  $v_2 = F(x)$  links van het nulpunt  $M$  snijdt, dan is

$$\int_A^B F(x) dv > 0 \quad (\text{want } F(x) \text{ en } dy < 0).$$

Als  $A \rightarrow A_1$  (verder van 0) dan ook  $B \rightarrow B_1$  (verder van 0).

In het gebied  $OH$  is  $F(x) < 0$ .

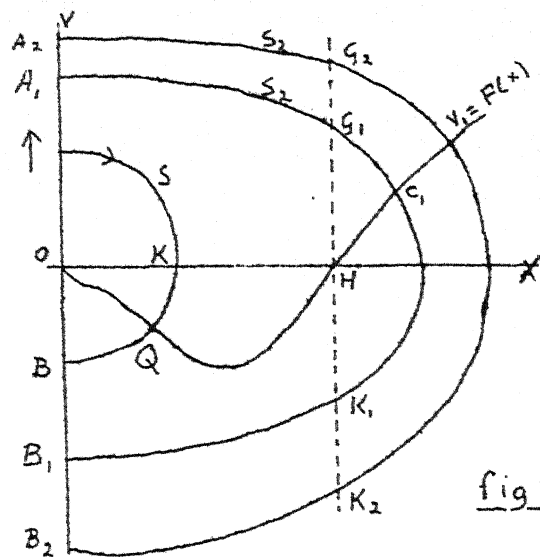
Bij overgang van  $S$  op  $S_1$  zal dus  $|v - F(x)|$  onbepaald toenemen (bij bepaalde  $x$ ). Wegens (10) zal  $|dv|$  afnemen.

De positieve bijdragen van  $\int F(x) dv$  over de bogen  $A_1 G_1$  en  $K_1 B_1$  zullen daarom afnemen, als  $A_1$  en  $B_1$  verder van 0 verwijderd zijn.

Over het gedeelte  $G_1 C_1 K_1$  is de bijdrage van  $\int F(x) dv$  negatief. Het is vrij gemakkelijk in te zien, dat de negatieve bijdrage over  $G_1 C_1 K_1$  in absolute waarde monotoon stijgt, terwijl de positieve bijdrage over  $A_1 G_1$  en  $K_1 B_1$  monotoon daalt. Zo komt men tot het resultaat, dat er 1 en slechts 1 kromme is, waarvoor

$$\int_A^B d\lambda = \int_A^B F(x) dy = 0$$

dus  $\lambda_B = \lambda_A$ , of  $v_B = -v_A$ . Dit wordt een gesloten kromme.



Litteratuur:

- 1) van der Pol B. : Forced oscillations in a system with non-linear resistance Phil.Mag. 1927
- 2) Minorski N. : Introduction to non-linear mechanics. J.W.Edwards Ann Arbor; Mich. 1947
- 3) Liénard A. : Etude des oscillations entretenues. Rev. Gén. d'Electr. 1928.
- 4) Mac Lachlan N.W. : Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences. Oxford 1950.
- 5) Hrag J. : Etude asymptotique des oscillations de relaxation. Ann.Sci. Ecole Norm. Sup. Vol 60 1943.
- 6) " " : Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation Ann.Sci.Ec. Norm.Sup.Vol.61 1944.
- 7) Dorodnitsyn A.A. : Asymptotic Solution of the van der Pol Equation (Russisch) Inst.Mech.of the Acad. of Sci.of the U.S.S.R. Vol.XI 1947.
- 8) Poincaré H. : Sur les courbes définies par une équation différentielle. Oeuvres Gauthier-Villars Paris Vol.1 1892.
- 9) " " : Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Vol.1. Gauthier-Villars Paris 1892.
- 10) Stoker J.J. : Non-linear vibrations in mechanical and electrical systems. Interscience Publishers New York 1950.
- 11) Levinson N. and Smith O.K. : A general equation for relaxation oscillations. Duke Mathematical Journal, Vol.9 June 1942.



Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

voordracht op 10 Mei 1951.

Grafische behandeling van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. (Methode der isoklinen).

door

Prof. Dr S.C. van Veen.

3<sup>e</sup> lezing.

Bewijs van Levinson en Smith voor het bestaan van één enkele limiet-cyclus onder bepaalde condities. (litt. 11).

Wij hebben reeds vroeger gezien, dat de differentiaal-vergelijking van van der Pol kan worden herleid tot:

$$(13) \quad \frac{dv}{dx} + \frac{x}{v - \varepsilon(\frac{x^3}{3} - x)} = 0. \text{ (zie 2<sup>e</sup> lezing, pag. 7, verg. 9).}$$

L & S beschouwen een iets algemener vorm, n.l.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{g(x)}{v - F(x)} = 0. \quad (14)$$

met de nevencondities

- 1)  $F(x)$  is een oneven functie van  $x$ , welke een nulpunt  $x_0$  bezit, zodat  $F(x) < 0$  voor  $0 < x < x_0$ ,  
 $F(x) > 0$  voor  $x > x_0$ , en monotoon toenemend voor  $x > x_0$ .  
( $F(0)=0$ ).

Men ziet onmiddellijk dat bij de vergelijking van van der Pol

$$F(x) = \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

aan deze eisen voldoet voor  $x_0 = \sqrt{3}$ .

- 2)  $g(x)$  is een oneven differentieerbare functie van  $x$ , met  $g(x) > 0$  voor  $x > 0$  ook hieraan voldoet:  $g(x) = x$ .

Verder wordt nog aangenomen dat  $F(x) \rightarrow \infty$  als  $x \rightarrow \infty$  en  $\int_0^\infty g(x) dx \rightarrow \infty$  wat ook bij de vergelijking van van der Pol het geval is.

Onder deze condities behoort er bij (14) één enkele limiet-cyclus.

Opmerkingen vooraf:

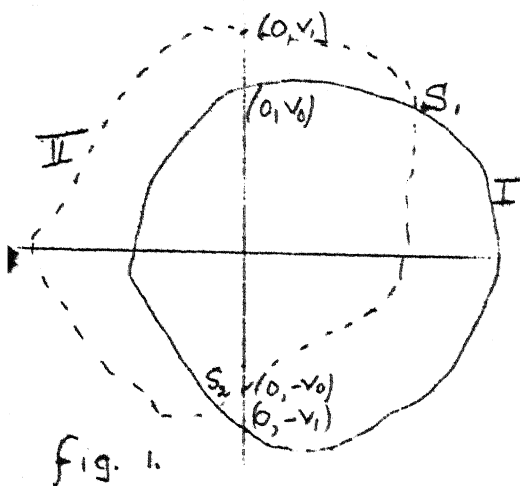
- a) Een limiet-cyclus is equivalent met een gesloten integraalkromme van (14).

b) Wanneer een gesloten integraalkromme door het punt  $(0, v_0)$  van de  $v$ -as gaat, dan moet deze ook door het spiegelpunt  $(0, -v_0)$  gaan.

Bewijs: Vergelijking (14) blijft onveranderd bij de transformatie

$$(x, v) \rightarrow (-x, -v). \quad (\text{wegens 1) en 2)).}$$

D.w.z. iedere integraalkromme levert weer een (i.h.a. andere) integraalkromme bij spiegeling t.o.v. de oorsprong.



Stel nu dat door  $(0, v_0)$  een gesloten integraalkromme gaat, die de tweede keer de  $v$ -as snijdt in  $(0, -v_1)$ , met  $v_1 \neq v_0$ . Dit is de kromme I.

Dan is er een tweede gesloten integraalkromme II, welke ontstaat door spiegeling van I t.o.v. de oorsprong.

Wanneer b.v.  $v_1 > v_0$  is, dan zal  $(0, -v_0)$  binnen I liggen, en  $(0, v_1)$  buiten I.

De kromme II zal dus I ten minste in 2 punten  $S_1$  en  $S_2$  moeten snijden. Door

deze punten zouden dan 2 integraalkrommen van de gewone diff.verg. van de 1ste orde (14) gaan.  $S_1$  en  $S_2$  zouden dan singuliere punten moeten zijn. Het enige singuliere punt van (14) is echter het punt waarvoor tegelijk

$$\begin{cases} g(x)=0 \\ v-F(x)=0 \end{cases} \quad \text{d.i. de oorsprong.}$$

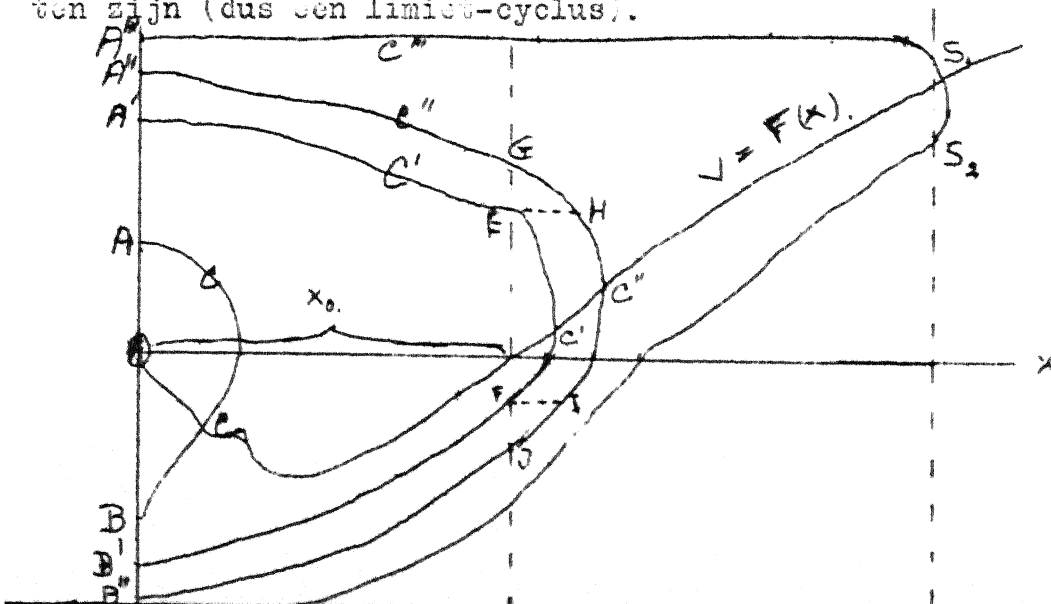
c) Omgekeerd is het duidelijk, dat iedere integraalkromme, die door 2 symmetrische punten  $(0, v_0)$  en  $(0, -v_0)$  gaat, gesloten moet zijn.

De schrijvers voeren nu de volgende hulpfunctie in:

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \int_0^x g(u) du. \quad (15)$$

Men ziet onmiddellijk dat tekenwisseling van  $x$  of  $v$  (of beide)  $\lambda(x, v)$  onveranderd laten.

Als dus voor zekere integraalkromme de functie  $\lambda$  in beide snijpunten met de  $v$ -as dezelfde waarde verkrijgt, moet de integraalkromme gesloten zijn (dus een limiet-cyclus).



Uit (14) volgt:

$$\begin{aligned} \text{voor } x > 0, \quad v > F(x) \quad \text{is} \quad \frac{dv}{dx} < 0 \\ \text{" " } 0, \quad v < F(x) \quad \text{"} \quad \frac{dv}{dx} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{voor } v = F(x) \text{ is } \frac{dv}{dx} = 0$$

In fig. 2 zijn ACB, A'C'B' en A''C''B'' integraalkrommen.

Uit (14) en (15) volgt:

$$v dv + g(x) dx = F(x) dv \quad d\lambda(x, v) = F(x) dv. \quad (16)$$

Beschouw nu ACB, zodat het snijpunt C ligt in het gebied  $0 < x < x_0$ . In dit gebied is  $F(x) < 0$ . Van A tot B is  $dv < 0$ , dus  $F(x) dv > 0$  dus volgens (16)

$$\int_A^B d\lambda(x, v) > 0, \text{ m.a.w. } \lambda_B > \lambda_A \text{ of } |OB| > |OA| \quad (I)$$

Vervolgens beschouwen wij integraalkrommen als A'C'B', A''C''B'', waarbij het snijpunt met de karakteristiek  $v = F(x)$  rechts van  $x = x_0$  valt.

Uit (16) en (14) volgt:

$$d\lambda(x, v) = \frac{-F(x)g(x)}{v - F(x)} dx.$$

Voor  $0 < x < x_0$  is  $-F(x) > 0$ . Langs A''G is  $v - F(x)$  groter dan langs A'E dus:

$$\begin{aligned} \text{m.a.w.} \quad \int_{A''}^G d\lambda(x, v) < \int_{A'}^E d\lambda(x, v) \\ \lambda_G - \lambda_{A''} < \lambda_E - \lambda_{A'} \quad (II) \end{aligned}$$

Langs GH is  $F(x) > 0$ , dus wegens (16). Langs GH is  $d\lambda(x, v) < 0$  of

$$\lambda_H - \lambda_G < 0. \quad (III)$$

$F(x)$  stijgt monotoon rechts van  $x = x_0$ , dus voor dezelfde waarde van  $y$  is  $F(x)$  langs HJ > langs EF, dus wegens (16)

$$\int_H^J d\lambda(x, v) < \int_E^F d\lambda(x, v) \text{ of } \lambda_J - \lambda_H < \lambda_F - \lambda_E \quad (IV)$$

Langs IJ volgt, evenals langs GH

$$\lambda_J - \lambda_I < 0 \quad (V)$$

en langs JB'' evenals langs A''G:

$$\lambda_{B''} - \lambda_J < \lambda_{B'} - \lambda_F \quad (VI)$$

Door optelling van (II), (III), (IV), (V) en (VI) volgt:

$$\begin{aligned} \lambda_{B''} - \lambda_{A''} < \lambda_{B'} - \lambda_{A'} \text{ of} \\ |OB''| - |OA''| < |OB'| - |OA'|. \end{aligned}$$

Wij zien hieruit, dat het verschil  $|OB| - |OA|$ , dat aanvankelijk positief was, monotoon daalt, als A zich verder van de oorsprong verwijderd.

Als wij nu nog bewijzen, dat dit verschil tenslotte negatief wordt, is het bewijs voltooid, omdat er dan precies 1 kromme zal zijn, waarvoor  $|OA| = |OB|$ .

Om dit laatste te bewijzen merken we op, dat de toename van  $\lambda$ , gaande van  $A''$  tot  $G$ , en van  $J$  tot  $B''$  monotoon afneemt, als  $OA''$  toeneemt.

Deze toename in  $\lambda$  is dus begrensd.

Van  $G$  tot  $J$  neemt  $\lambda$  af.

Laat  $OA''$  zover aangroeien, dat de bijbehorende integraalkromme nog de verticale  $x=2x_0$  snijdt. Noem de snijpunten  $S_1$  en  $S_2$  ( $S_1$  hoger dan  $S_2$ )

$$v_{S_1} = v_0 > F(2x_0) \quad ; \quad v_{S_2} < F(2x_0).$$

In het bovenste stuk is dus voor  $0 < x < 2x_0$ ;  $v - F(x) > v - F(2x_0) > 0$ .

" " onderste "  $v - F(x) < v - F(2x_0)$

Beginnen wij in  $A''$ , dan is in  $0 < x < 2x_0$

$$-dv \leq \frac{g(x)dx}{v - F(2x_0)}$$

Dus na integratie

$$\frac{|OA''|^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} - F(2x_0)(OA'' - v_0) \leq \int_0^{2x_0} g(x)dx$$

of

$$(|OA''| - v_0) \left[ \frac{|OA''| + v_0}{2} - F(2x_0) \right] \leq \int_0^{2x_0} g(x)dx$$

$$OA'' - v_0 \leq \frac{2 \int_0^{2x_0} g(x)dx}{|OA''| + v_0 - 2F(2x_0)}$$

Dus als  $|OA''| \rightarrow \infty$  zal  $v_0 \rightarrow |OA''|$ .

Daar 2 integraalkrommen elkaar niet snijden, volgt hieruit, dat de afstand  $|S_1 S_2| > v_0 - F(2x_0) \rightarrow \infty$ .

Voor  $x > 2x_0$ ,  $F(x) > F(2x_0)$ , dus  $d\lambda < F(2x_0)dv$ .

Geïntegreerd tussen de snijpunten op  $x=2x_0$  vinden wij

$$\int d\lambda < -F(2x_0) \cdot D$$

waarin  $D$  de afstand der snijpunten is.

$D \rightarrow \infty$  dus afname  $\lambda$  is onbeperkt. De toename van  $\lambda$  was begrensd.

Tenslotte moet  $\lambda$  dus negatief worden, w.t.b.w.